Н. РЫБКИН

# ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК
ДЛЯ 9 и 10 КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

УЧПЕДГИЗ
1951

Н. РЫБКИН

# ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК
ДЛЯ 9 и 10 КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

*Утверждён*
*Министерством просвещения РСФСР*

ИЗДАНИЕ ДВАДЦАТЬ ДЕВЯТОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА — 1951

# ОГЛАВЛЕНИЕ.


| | Стр. |
|---|---|
| **Введение** . . . . . | 3 |
| **О тригонометрических функциях.** | |
| I. Тригонометрические функции острого угла . . . . . | 7 |
| II. Тригонометрические функции углов от 90° до 360° . . . | 23 |
| III. Углы отрицательные. Углы, большие 360° . . . . . | 38 |
| IV. Выражение синуса, косинуса и тангенса суммы и разности углов, двойного угла и половины угла . . . . . | 58 |
| V. Приведение выражений к виду, удобному для логарифмирования . . . . . | 60 |
| VI. О тригонометрических уравнениях . . . . . | 64 |
| **О тригонометрических таблицах.** | |
| VII. Понятие о составлении тригонометрических таблиц . . . | 71 |
| VIII. Тригонометрические таблицы . . . . . | 74 |
| **О решении треугольников.** | |
| IX. Прямоугольные треугольники . . . . . | 79 |
| X. Косоугольные треугольники . . . . . | 85 |
| XI. Об измерениях на местности . . . . . | 106 |
| Основные тригонометрические формулы . . . . . | 112 |

# ВВЕДЕНИЕ.

**§ 1. Предмет тригонометрии.** Слово тригонометрия в переводе с греческого языка означает измерение треугольников. Такое название она получила потому, что первоначальной задачей этой науки было нахождение способов вычислять неизвестные элементы треугольников (углы и стороны) по другим, известным их элементам (решение треугольников). Эта задача и ныне остаётся одной из основных задач тригонометрии.

Для установления числовых зависимостей между сторонами и углами треугольника в тригонометрии рассматриваются особые вспомогательные величины, зависящие от величины угла, называемые тригонометрическими функциями. Но значение тригонометрических функций не ограничивается их применением к решению треугольников — они находят применение во многих других отделах математики, а также в физике, механике и т. д. В связи с этим изучение тригонометрических функций сделалось не менее важной задачей, чем решение треугольников.

Таким образом, тригонометрия распадается на две части: гониометрию — учение о свойствах тригонометрических функций, и тригонометрию в узком смысле слова — учение о решении треугольников.

Тригонометрия имеет большое применение в практике: при геодезических работах — определение высот и расстояний, съёмка планов, триангуляция; в астрономии — определение высот и азимутов светил, склонения и прямого восхождения, вообще небесных координат, а знание небесных координат ведёт к вычислению географических координат; в механике — проектирование силы на ось, направление равнодействующей, законы периодического движения; в машиноведении — расчёт нарезок, зубчатых колёс и т. п.

Возникла тригонометрия в Греции в связи с астрономией; астрономия в свою очередь развивалась под влиянием потребностей мореплавания и земледелия; для безопасности

морских путешествий требовалось определять по звёздам правильный курс корабля; для земледелия требовался точный календарь, который могла дать астрономия, основанная на математике и в частности на тригонометрии.

Автором первых тригонометрических таблиц считается Гиппарх, живший во II в. до нашей эры. Таблицы Гиппарха содержали длины хорд для различных центральных углов.

За 100 лет до нашей эры учёный Менелай открыл основы сферической тригонометрии. Клавдий Птоломей, знаменитый автор доксперниковской геоцентрической системы мира, в своей книге „Syntaxis Mathematica" поместил таблицы длины хорд круга, радиус которого равен единице. Радиус он делил на 60 частей, каждую из частей — ещё раз на 60 частей и ещё раз на 60 частей; эти части назывались partes minutae primae и partes minutae secundae, откуда и произошли наши названия: минуты („первые уменьшённые части") и секунды („вторые уменьшённые части"). Таблицы Птоломея содержали величины хорд для центральных углов

в $1°$, $1\frac{1°}{2}$, $2°$, $2\frac{1°}{2}$, ...

В средние века тригонометрия развивалась в Индии. Индусы употребляли половину хорды, т. е. линию синуса; они же ввели косинус. Индусам были известны таблицы синусов, формула $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (которую, впрочем, они писали не с помощью математических символов, а словами) и приведение синуса и косинуса тупого угла к функциям острого угла.

В IX и X вв. арабские учёные ввели тангенс и составили более точные таблицы синусов. Развитие тригонометрии у арабов объясняется тоже потребностями астрономии и мореплавания, так как арабы вели большую торговлю по Средиземноморскому побережью.

В Европе первым писателем по тригонометрии был английский учёный Брадвардин (XIII и XIV вв.). Первый систематический курс тригонометрии написал в XV в. немецкий учёный Иоган Мюллер, писавший под именем Регио-монтана. В книге „О треугольниках всех видов" он приводит решение плоских и сферических треугольников. Региомонтан излагает тригонометрию уже как самостоятельную науку, независимую от астрономии.

С XVI в., после введения Виета буквенных обозначений, формулы тригонометрии принимают современный характер.

Из других учёных работали в области тригонометрии Непер (изобретатель логарифмов), Потенот и член Петербургской академии наук гениальный Эйлер. Эйлера можно считать основателем современного учения о тригонометрических функциях.

**§ 2. Понятие о функции.** Существуют переменные величины, связанные между собою так, что каждому значению одной из них соответствует определённое значение другой. Таковы, например, переменные величины $y$ и $x$ в следующих равенствах:

$$y = a + x;\ y = x^2;\ y = \sqrt{x}$$ и т. д.,

таковы же: сторона квадрата и его площадь, радиус шара и его объём и т. д.

Переменная величина, значения которой соответствуют значениям другой переменной величины, называется функцией этой второй величины. Так, например, можно сказать, что площадь круга есть функция его радиуса; действительно, с изменением длины радиуса изменяется и площадь круга, и при этом каждому значению радиуса соответствует определённое значение площади круга (и наоборот: радиус круга мы назовём функцией его площади, если будем назначать площадь и по ней определять радиус).

Та величина, в зависимости от которой изменяется функция, называется аргументом функции. Так, если равенство $y = x^3$ служит для определения $y$ по данному $x$, то $x$ есть аргумент, а $y$ — функция; также в равенстве $y = \lg N$ имеем: $N$ есть аргумент, $y$ — функция.

**§ 3. Измерение дуг и углов.** Как известно из геометрии, углы измеряются с помощью дуг.

*Если дуга служит для измерения угла, то её выражают или в долях окружности, или в долях радиуса* [1]).

Первый способ даёт для дуги и угла градусное выражение, известное из геометрии.

Второй способ состоит в том, что дугу выражают числом, показывающим её отношение к радиусу; если, например, сказано: „величина дуги равна 2,43“, то это значит, что выпрямленная дуга содержит 2,43 радиуса; полуокруж-

[1]) Первый способ нагляднее и применяется в практических измерениях (на угломерных инструментах), второй предпочитают в теоретических вопросах.

ность по этому способу измеряется отношением $\pi R : R$, т. е. числом $\pi$, а четверть окружности — числом $\frac{\pi}{2}$ и т. п.

Такое измерение дуги мы будем называть радианным. Чтобы при этом способе центральный угол измерялся тем же числом, что и его дуга, надо, чтобы угловая единица соответствовала дуге, длина которой равна радиусу. Такая угловая единица называется радианом.

Таким образом, мы можем сказать: радианная мера угла есть его отношение к радиану; например, выражение „угол, равный $\frac{3}{2}\pi$“ понимается как „угол, равный $\frac{3}{2}\pi$ радианов“.

Так как в длине окружности радиус содержится $2\pi$ раз, то градусная мера радиана (и дуги, равной радиусу) есть $\frac{360^\circ}{2\pi}$; это равно $57^\circ 17' 44{,}8''$ (с точностью до $0{,}05''$).

Полезно запомнить ещё следующее. Радианная мера всей окружности есть $2\pi R : R$, т. е. число $2\pi$, а её градусная мера есть $360^\circ$; отсюда получаются следующие соответствия:

| $360^\circ$ | $180^\circ$ | $90^\circ$ | $270^\circ$ | $60^\circ$ | $45^\circ$ | $30^\circ$ | $18^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\pi$ | $\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{10}$ |

Выведем теперь формулы для перехода от градусной меры к радианной и обратно.

Обозначим градусную меру какой-нибудь дуги или угла через $a$, а радианную — через $\alpha$. Так как градусная мера полной окружности есть $360^\circ$, а радианная $2\pi$, то получим пропорцию:

$$\frac{a}{360^\circ} = \frac{\alpha}{2\pi}, \text{ или } \frac{a}{180^\circ} = \frac{\alpha}{\pi};$$

отсюда:

$$\alpha = \pi \cdot \frac{a}{180^\circ} \qquad (1)$$

и

$$a = 180^\circ \cdot \frac{\alpha}{\pi}. \qquad (2)$$

**Пример.** Найти радианную меру угла 67°30'.
По формуле (1), заменяя $\alpha$ через 67°30', найдём:

$$x = \pi \cdot \frac{67°30'}{180°} = \frac{3}{8}\pi;$$

если же подставить сюда приближённое значение $\pi$, равное 3,14159, то получим $x = 1{,}17810$, с точностью до половины одной стотысячной.

Без применения формулы можно получить $x$ из следующих соответствий:

$$360° \ldots 2\pi;\ 1° \ldots \frac{2\pi}{360};\ 67°30' = 67{,}5° \ldots$$

$$\ldots \frac{2\pi}{360} \cdot 67\frac{1}{2} = \frac{3}{8}\pi.$$

**§ 3а. Длина дуги.** Если обозначить через $r$ радиус окружности, через $l$ — длину дуги, а через $a$ — радианную меру соответствующего центрального угла, то согласно определению радианной меры получим:

$$a = \frac{l}{r},\ \text{откуда}\ l = ra,$$

т. е. *длина дуги равна радиусу, умноженному на радианную меру дуги.*

Эта формула часто употребляется в физике и технике.

Для вычислений, связанных с радианной мерой, следует пользоваться таблицами для перевода градусов в радианы и обратно. (В таблицах Брадиса — таблица VIII, в таблицах Пржевальского — XI.)

# О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ.

## (ГОНИОМЕТРИЯ.)

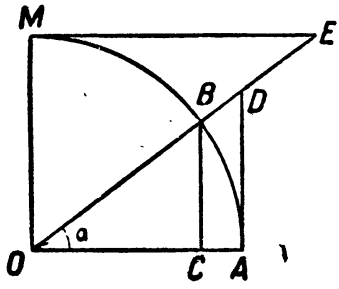
## I. Тригонометрические функции острого угла.

**§ 4. Названия и обозначения.** Тригонометрические функции угла следующие: синус, косинус, тангенс, котангес, секанс, косеканс.

Они имеют следующие обозначения: sin, cos, tg, ctg, sec, cosec. При этом рядом со знаком функции записывается

значение аргумента (угла), которому соответствует рассматриваемое значение функции, так что, например, синус угла $\alpha$ пишется: $\sin\alpha$.

**§ 5. Определение тригонометрических функций острого угла.** Возьмём какой нибудь острый угол $\alpha$ и сделаем его центральным, — для этого проведём окружность произвольного радиуса, приняв вершину угла за центр окружности. Длину радиуса обозначим через $R$. Чтобы различать между ссбой радиусы, образующие угол, будем представлять себе, что при изменении угла $\alpha$ (черт. 1) радиус $OA$ сохраняет своё положение, а радиус $OB$ вращается; в этом смысле будем называть радиус $OB$ подвижным радиусом угла, а радиус $OA$ неподвижным. Обращаясь теперь к определениям тригонометрических функций, скажем сначала вообще, что они представляют собой отношения к радиусу особых линий в круге, проводимых для данного угла как для центрального. Для построения этих линий, кроме дуги $AB$, пользуются ещё её продолжением и радиусом $OM$, проведённым под прямым углом к $OA$.



Черт. 1.

Определения тригонометрических линий и функций для острого угла следующие:

1) Перпендикуляр ($BC$), опущенный из конца подвижного радиуса на неподвижный, называется линией синуса, а отношение этой линии к радиусу есть синус данного угла $\left(\sin\alpha = \frac{BC}{R}\right)$.

2) Перпендикуляр ($OC$) из центра на линию синуса называется линией косинуса, а отношение этой линии к радиусу есть косинус данного угла $\left(\cos\alpha = \frac{OC}{R}\right)$.

3) Отрезок касательной ($AD$), проведённой из конца неподвижного радиуса до встречи с продолжением подвижного радиуса, называется линией тангенса, а её отношение к радиусу есть тангенс данного угла $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{R}\right)$

4) Отрезок касательной ($ME$), проведённой из конца радиуса, перпендикулярного к неподвижному, до встречи

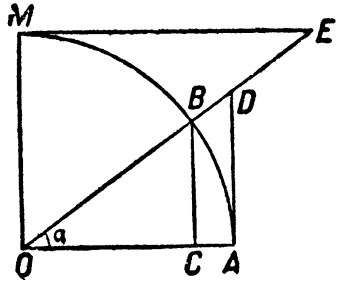
с продолжением подвижного радиуса, называется линией котангенса, а её отношение к радиусу есть котангенс данного угла $\left(\operatorname{ctg}\alpha = \frac{ME}{R}\right)$.

5) Расстояние ($OD$) от центра до конца линии тангенса называется линией секанса, а отношение этой линии к радиусу есть секанс данного угла $\left(\sec\alpha = \frac{OD}{R}\right)$.

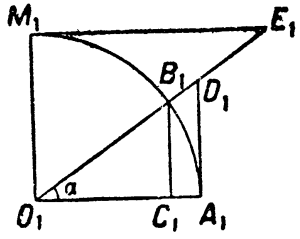
6) Расстояние ($OE$) от центра до конца линии котангенса называется линией косеканса, а отношение этой линии к радиусу есть косеканс данного угла $\left(\operatorname{cosec}\alpha = \frac{OE}{R}\right)$.

Так, например, если радиус равен 9 *см*, а линия синуса равна 6 *см*, то для синуса получим число $\frac{2}{3}$.

§ 6. ***Теорема.*** *Значения тригонометрических функций зависят только от величины угла и не зависят от радиуса круга, в котором рассматривается угол.*




Черт. 2.




Черт. 3.

Пусть на чертежах 2 и 3 углы $AOB$ и $A_1O_1B_1$ равны данному углу $\alpha$, а радиусы $OA$ и $O_1A_1$ дуг $AB$ и $A_1B_1$ не равны. Нам нужно доказать, что одноимённые функции углов $AOB$ и $A_1O_1B_1$ равны.

Значения тригонометрических функций при радиусе $R$ обозначим через $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, ..., а при радиусе $R_1$ через $\sin_1\alpha$, $\cos_1\alpha$, ... ; требуется доказать, что $\sin_1\alpha = \sin\alpha$, $\cos_1\alpha = \cos\alpha$ и т. д.

Доказательство. Треугольники $O_1B_1C_1$, $O_1D_1A_1$ и $O_1M_1E_1$ соответственно подобны треугольникам $OBC$, $ODA$ и $OME$; поэтому:

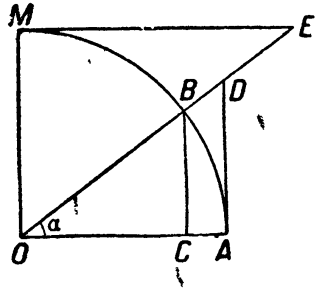
$$\frac{B_1C_1}{R_1}=\frac{BC}{R},\quad \frac{O_1C_1}{R_1}=\frac{OC}{R},\quad \frac{A_1D_1}{R_1}=\frac{AD}{R}$$

и т. д., т. е. $\sin_1\alpha=\sin\alpha$, $\cos_1\alpha=\cos\alpha$, $\operatorname{tg}_1\alpha=\operatorname{tg}\alpha$ и т. д.

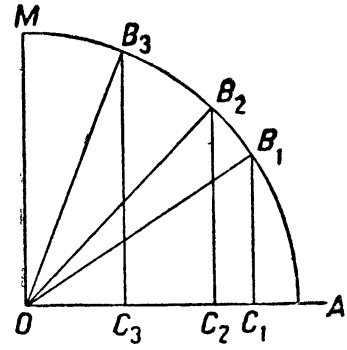
Итак, для одного и того же угла тригонометрическая функция при всяком радиусе имеет одно и то же значение.

**§ 7.** В предыдущем параграфе было доказано, что с изменением длины радиуса тригонометрические функции данного угла не меняются; но если мы изменим величину угла, то, как видно по чертежу, каждая из тригонометрических функций изменит своё значение.

**§ 8.** Так как центральный угол и его дуга выражаются одним и тем же числом, то тригонометрические функции угла суть в то же самое время и тригонометрические функции дуги, понимая под словом дуга её градусную, или радианную, меру. Ввиду этого мы будем иногда, для удобства, вместо углов пользоваться дугами; иногда же будем рассматривать угол и дугу под общим названием аргумент.




Черт. 4.




Черт. 5.

**§ 9. Изменение тригонометрических функций с изменением угла от 0° до 90°.** Если на чертеже 4 угол $\alpha$ будет возрастать от 0° до 90°, то отношения $\frac{BC}{R}$, $\frac{AD}{R}$ и $\frac{OD}{R}$ будут увеличиваться, а отношения $\frac{OC}{R}$, $\frac{ME}{R}$ и $\frac{OE}{R}$ будут уменьшаться (на черт. 5 показано изменение синуса и косинуса); таким образом, с возрастанием острого угла

его синус, тангенс и секанс возрастают, а косинус, котангенс и косеканс убывают. Когда угол $\alpha$ достигает 90°, то $\frac{BC}{R}$ обращается в 1, $\frac{OC}{R}$ в 0, $\frac{AD}{R}$ в $\infty$, $\frac{ME}{R}$ в 0, $\frac{OD}{R}$ в $\infty$ и $\frac{OE}{R}$ в 1; таким образом:

$$\sin 90° = 1,\ \cos 90° = 0,\ \operatorname{tg} 90° = \infty,\ \operatorname{ctg} 90° = 0,$$
$$\sec 90° = \infty \text{ и } \operatorname{cosec} 90° = 1.$$

При уменьшении угла $x$ от 90° до 0° $\frac{BC}{R}$, $\frac{AD}{R}$ и $\frac{OD}{R}$ убывают, а $\frac{OC}{R}$, $\frac{ME}{R}$ и $\frac{OE}{R}$ возрастают. Если угол $\alpha$ обращается в нуль, то $\frac{BC}{R}$ обращается в 0, $\frac{OC}{R}$ в 1, $\frac{AD}{R}$ в 0, $\frac{ME}{R}$ в $\infty$, $\frac{OD}{R}$ в 1 и $\frac{OE}{R}$ в $\infty$; таким образом:

$$\sin 0° = 0,\ \cos 0° = 1,\ \operatorname{tg} 0° = 0,\ \operatorname{ctg} 0° = \infty,$$
$$\sec 0° = 1 \text{ и } \operatorname{cosec} 0° = \infty.$$

Равенства, содержащие знак бесконечности ($\infty$), надо понимать условно; так, равенство $\operatorname{tg} 90° = \infty$ имеет лишь тот смысл, что с приближением угла к 90° тангенс неограниченно возрастает.

Итак, если $\alpha$ возрастает от 0° до 90°, то
$\sin\alpha$ возрастает от 0 до 1; $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает от $\infty$ до 0;
$\cos\alpha$ убывает от 1 до 0; $\sec\alpha$ возрастает от 1 до $\infty$;
$\operatorname{tg}\alpha$ возрастает от 0 до $\infty$; $\operatorname{cosec}\alpha$ убывает от $\infty$ до 1.

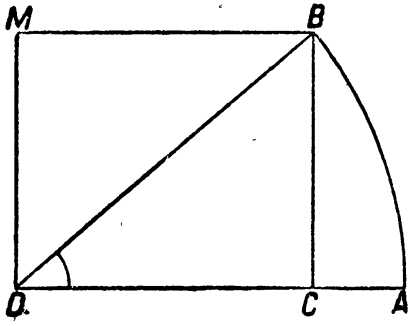
Так как 0° и 90° суть крайние значения острого угла, то полученный вывод показывает также, какие значения вообще способна принимать каждая из тригонометрических функций острого угла; так, например, мы видим, что число 3 может быть значением тангенса, котангенса, секанса и косеканса, но не может быть значением ни синуса, ни косинуса.

**§ 10. Построение острого угла по данной тригонометрической функции.** Из § 6 и 9 видно, что каждому значению угла $\alpha$ соответствует определённое значение каждой из тригонометрических функций. Но и обратно, каждому зна-

чению какой-либо тригонометрической функции соответствует острый угол определённой величины. Ниже будут показаны способы построения острого угла по данному значению одной из его тригонометрических функций. Воспользуемся для этого примерами построения.

**Пример 1.** Построить угол, зная, что его синус равен $\frac{2}{3}$ (черт. 6).

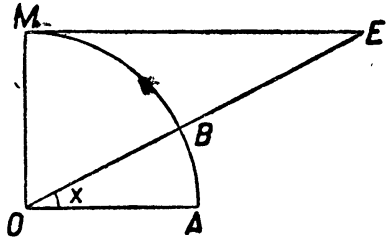
Решение. Проведя произвольную прямую $OA$, примем точку $O$ за центр дуги, а $OA$ — за неподвижный радиус искомого угла и опишем этим радиусом дугу $AB$. Чтобы синус был равен $\frac{2}{3}$, конец дуги $AB$ должен быть удалён от $OA$ на расстояние, которое относилось бы к радиусу, как 2 : 3. Поэтому поступаем так: восставив перпендикуляр $OM$, равный $\frac{2}{3}$ $OA$, проведём из точки $M$ параллель к $OA$ и точку $B$ её пересечения с дугой $AB$ соединим с центром дуги $O$; угол $AOB$ есть искомый, так как $\sin AOB = \frac{2}{3}$.



Черт. 6.

Заметим, что этот угол не зависит от длины радиуса, так как при всяком другом радиусе мы получим треугольник, подобный треугольнику $OBC$, и, следовательно, с углами такой же величины.

**Пример 2.** Построить угол, если известно, что его котангенс равен 2 (черт. 7).

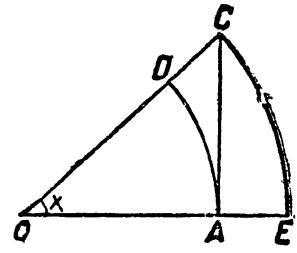


Черт. 7.

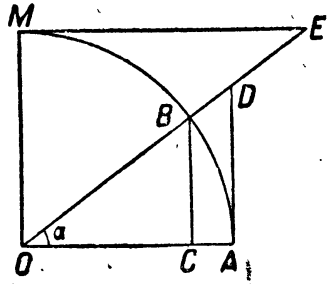
Решение. Приняв вершину прямого угла $AOM$ за центр, опишем дугу $AM$ произвольного радиуса; пусть $M$ — точка пересечения этой дуги со стороной $OM$ прямого угла. Из точки $M$ проведём касательную $ME$, равную двум радиусам, и точку $E$ соединим с центром; угол $AOB$ есть искомый, так как $\operatorname{ctg} AOB = \frac{ME}{R} = \frac{2R}{R} = 2$.

**Пример 3.** Построить угол, секанс которого равен $\frac{4}{3}$.

Решение. Опишем какую-нибудь дугу $AD$ (черт. 8) и, приняв один из её радиусов ($OA$) за неподвижный, проведём из его конца касательную. Так как секанс равен $\frac{4}{3}$, то конец касательной должен отстоять от центра на $\frac{4}{3}$ радиуса. Чтобы достигнуть этого, возьмём отрезок $OE$, равный $\frac{4}{3}\,OA$, и опишем дугу $EC$ радиусом $OE$ с центром в $O$ до пересечения с касательной $AC$. Точку пересечения $C$ дуги $EC$ с касательной $AC$ соединяем с $O$; угол $AOC$ будет искомый. Как и в двух предыдущих примерах, результат не зависит от длины радиуса.



Черт. 8.



Черт. 9.

Предлагаем теперь самому учащемуся сделать построения острых углов по следующим данным: $\cos x = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} x = \frac{4}{7}$ и $\operatorname{coses} x = 2$.

**§ 11.** Итак, для каждого значения тригонометрической функции получается определённый острый угол, а раньше мы видели, что каждому углу соответствует определённое значение тригонометрической функции. Таким образом, можно сказать, что *острый угол и его тригонометрическая функция вполне определяют друг друга.*

**§ 12. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же угла.** Между тригонометрическими функциями одного и того же угла легко обнаружить весьма простые зависимости (черт. 9).

1) Из прямоугольного треугольника $OBC$ имеем:

$$BC^2 + OC^2 = OB^2.$$

Разделив здесь обе части на $R^2$, получим:

$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2 + \left(\frac{OC}{R}\right)^2 = \left(\frac{OB}{R}\right)^2,$$

или:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (I)$$

2) Из подобия треугольников $ODA$ и $OBC$ имеем:

$$\frac{AD}{OA} = \frac{BC}{OC},$$

отсюда, заменяя $OA$ через $R$ и разделив на $R$ оба члена второго отношения, найдем:

$$\frac{AD}{R} = \frac{\left(\frac{BC}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)},$$

или:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (II)$$

3) Из подобия треугольников $EOM$ и $OBC$ находим:

$$\frac{ME}{OM} = \frac{OC}{BC}, \text{ откуда } \frac{ME}{R} = \frac{\left(\frac{OC}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)},$$

или:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (III)$$

4) Из подобия треугольников $ODA$ и $OBC$ находим:

$$\frac{OD}{OA} = \frac{OB}{OC}, \text{ отсюда } \frac{OD}{R} = \frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{OC}{R}\right)},$$

или:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},$$

откуда:

$$\sec\alpha \cdot \cos\alpha = 1. \qquad (IV)$$

5) Из подобия треугольников $EOM$ и $OBC$ имеем:

$$\frac{OE}{OM}=\frac{OB}{BC},\ \text{откуда}\ \frac{OE}{R}=\frac{\left(\frac{OB}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)},$$

или:

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},$$

откуда:

$$\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sin\alpha=1. \qquad (V)$$

**§ 13.** Между тригонометрическими функциями одного и того же угла существуют только пять независимых соотношений. Чтобы убедиться в этом, начнём с построения.

Действительно, достаточно знать значение одной функции, чтобы построить угол (§ 10), а полученный угол определит собой значения остальных пяти функций; таким образом, если известно значение одной функции, то по нему можно найти значения остальных пяти. Но для определения пяти неизвестных мы должны иметь и пять уравнений, независимых друг от друга. Если бы таких уравнений было шесть, то для всех шести функций получились бы определённые постоянные значения, между тем как они изменяются вместе с изменением угла.

**§ 14.** Кроме пяти основных формул, полученных в § 12, полезно запомнить ещё следующие три, которые можно уже вывести из основных.

1) Перемножая соответственные части равенств (II) и (III), будем иметь:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1. \qquad (VI)$$

2) Деля равенство (I) на $\cos^2\alpha$ и применяя формулы (II) и (IV), получим (если переставим слагаемые левой части):

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha. \qquad (VII)$$

3) Деля равенство (I) на $\sin^2\alpha$ и применяя формулы (III) и (V), найдём:

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha. \qquad (VIII)$$

*Замечание 1.* Формула (VI) может быть получена непосредственно из подобия треугольников $OAD$ и $EMO$, а формулы (VII) и (VIII) — при помощи теоремы Пифагора из тех же треугольников.

*Замечание 2.* Заметим для памяти, что в обычном ряде синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс функции, равноуда-

лённые от концов этого ряда, дают в произведении единицу [см. формулы (IV), (V) и (VI)].

Основными функциями мы будем считать синус, косинус и тангенс, а остальные три по величине обратны им:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\quad\text{и}\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

§ 15. С помощью формул, полученных в § 12 и 14, легко, зная значение одной функции некоторого угла, найти значения всех остальных функций этого угла. Так, например, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, то будем иметь последовательно:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1;\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3};$$

$$\sec^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha;\qquad \sec^2\alpha=\frac{25}{16};\qquad \sec\alpha=\frac{5}{4};$$

$$\sec\alpha\cdot\cos\alpha=1;\qquad \cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha};\qquad \cos\alpha=\frac{4}{5};$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha;\qquad \sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha;\qquad \sin\alpha=\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sin\alpha=1;\qquad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha};\qquad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{5}{3}.$$

С помощью тех же формул можно все функции какого-либо угла выразить через одну из них. Например, выражая все функции угла $\alpha$ через $\sin\alpha$, получим:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha};\quad \sec\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}};\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

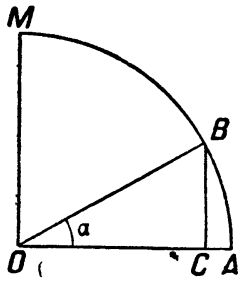
§ 16. Из подобия треугольников $OBC$, $ODA$ и $EOM$ (черт. 9) видно, между прочим, что шесть тригонометрических функций острого угла представляют собой не что иное, как шесть различных отношений, возможных между сторонами одного прямоугольного треугольника, взятыми попарно.

Действительно, из сторон треугольника $OBC$ можно составить следующие шесть отношений: $\frac{BC}{OB}$, $\frac{OC}{OB}$, $\frac{BC}{OC}$, $\frac{OC}{BC}$, $\frac{OB}{OC}$ и $\frac{OB}{BC}$.

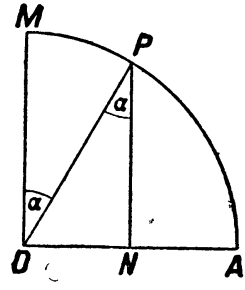
Но, описав дугу $ABM$ и построив треугольники $ODA$ и $EOM$, мы заменяем указанный ряд отношений следующим: $\frac{BC}{R}$, $\frac{OC}{R}$, $\frac{AD}{R}$, $\frac{ME}{R}$, $\frac{OD}{R}$ и $\frac{OE}{R}$. Такая замена представляет значительные преимущества, одно из которых состоит, например, в том, что отношения принимают при этом вид дробей, приведённых к общему знаменателю, чем облегчается их сравнение между собой.

**§ 17. Зависимость между тригонометрическими функциями дополнительных углов.** Дополнительными углами называют такие два угла, сумма которых равна прямому углу. Например, дополнительными углами являются углы $\alpha$ и $90°-\alpha$; $\alpha$ и $\frac{\pi}{2}-\alpha$; $26°$ и $64°$.

На чертеже 10 построены $\angle AOB=\alpha$, а также его линии синуса и косинуса, так что $\sin\alpha=\frac{BC}{R}$; $\cos\alpha=\frac{OC}{R}$.




Черт. 10.




Черт. 11.

На чертеже 11 (дуга на черт. 11 имеет тот же радиус, как и на черт. 10) построены $\angle AOP=90°-\alpha$ и его линии синуса и косинуса, так что $\sin(90°-\alpha)=\frac{PN}{R}$; $\cos(90°-\alpha)=\frac{ON}{R}$.

Так как треугольники $OBC$ и $NOP$ равны, то $NP=OC$; $ON=BC$, а следовательно:

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha; \qquad (1)$$

$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha. \qquad (2)$$

Для остальных функций, чтобы не осложнять чертежа новыми линиями, получим аналогичные формулы из формул (1) и (2) и формул § 12.

$$\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\cos(90^\circ-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha; \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\frac{\cos(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha; \qquad (4)$$

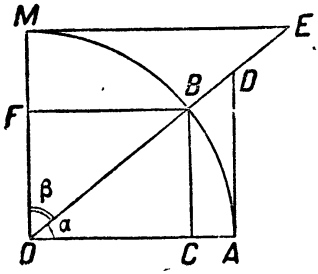
$$\sec(90^\circ-\alpha)=\frac{1}{\cos(90^\circ-\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha; \qquad (5)$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ-\alpha)=\frac{1}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha. \qquad (6)$$

Замечаем следующее: *для дополнительных углов функции одного угла соответственно равны сходным* [1]) *функциям другого.*

Так, $\operatorname{tg}63^\circ=\operatorname{ctg}27^\circ$; $\sec\frac{\pi}{6}=\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$, т. е. $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3}$, и т. п.

§ 18. Другой вывод. Отложим (черт. 12) $\angle AOB=\alpha$ и построим все его тригонометрические линии. Тогда для $\angle MOB=90^\circ-\alpha$ неподвижным радиусом будет $OM$, подвижным $OB$. Применяя теперь определения тригонометрических функций, данных в § 5, найдём:



Черт. 12.

$$\sin\alpha=\frac{BC}{R}=\frac{OF}{R}=\cos(90^\circ-\alpha);$$

$$\cos\alpha=\frac{OC}{R}=\frac{FB}{R}=\sin(90^\circ-\alpha);$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{AD}{R}=\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha);$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{ME}{R}=\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha).$$

**§ 19. Примеры вычисления значений тригонометрических функций данного угла.** Не касаясь общего приёма, разберём здесь несколько случаев, легко решаемых с помощью геометрии.

1) Дан угол в $30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (черт. 13). Вычислим значения тригонометрических функций этого угла.

[1]) Т. е. сходным по названию.

Дополнив линию синуса до хорды, получим сторону правильного вписанного шестиугольника; она равна радиусу. Таким образом,

$$BC = \frac{R}{2},$$

и, следовательно,

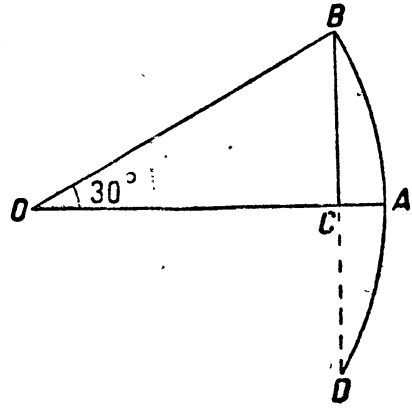
$$\sin 30° = \frac{1}{2}.$$

Остальные пять функций найдём по формулам (I), (II), (III):

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\operatorname{ctg} 30° = \frac{\cos 30°}{\sin 30°} \left(\text{или } \frac{1}{\operatorname{tg} 30°}\right) = \sqrt{3}.$$

2) Дан угол в $60° \left(\frac{\pi}{3}\right)$. Дополнив линию синуса до хорды, получим сторону правильного вписанного треугольника; она равна $a_3 = R\sqrt{3}$, где $R$ — радиус круга. Следовательно:




Черт. 13.

$$\sin 60° = \frac{\frac{1}{2} a_3}{R} = \frac{\frac{1}{2} R\sqrt{3}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

далее, поступая, как и в первом примере, найдём:

$$\cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3) Возьмём угол в $45° \left(\frac{\pi}{4}\right)$. Применяя формулы § 17, будем иметь: $\sin 45° = \cos 45°$, $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45°$. Если $\sin 45° = \cos 45°$, то

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1,$$

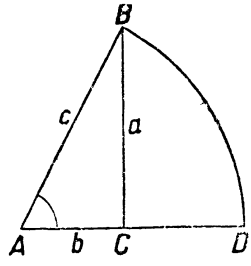
а следовательно, и $\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$. Далее получим:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\operatorname{cosec} 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а следовательно, и $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4) Если угол равен $18^\circ \left(\frac{\pi}{10}\right)$, то линия синуса равна половине стороны правильного вписанного десятиугольника, а так как сторона десятиугольника равна $\frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$, то линия синуса будет равна $\frac{R}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)$, и потому $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$.

**§ 20. Зависимость между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.** Покажем теперь, как посредством тригонометрических функций устанавливается зависимость между сторонами и углами прямоугольного треугольника.



Черт. 14.

Условимся сначала об обозначениях. Будем обозначать длину сторон треугольника буквами $a$, $b$ и $c$, а величину противолежащих им углов соответственно буквами $A$, $B$ и $C$; при этом будем предполагать, что все стороны измерены одной и той же единицей. В прямоугольном треугольнике прямой угол будем обозначать буквой $C$.

Обратимся теперь к выводу формул.

I. Описав (черт. 14) радиусом $c$ дугу $BD$, будем иметь по § 5:

$$\frac{a}{c} = \sin A \qquad (1)$$

и

$$\frac{b}{c} = \cos A, \qquad (2)$$

т. е. отношение катета к гипотенузе есть: 1) синус острого угла, если катет противолежит острому углу, и 2) косинус острого угла, если катет служит стороной этого угла.

II. Деля равенство (1) на равенство (2), а затем обратно, найдём:

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A; \qquad (3)$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A, \qquad (4)$$

т. е. отношение катетов прямоугольного треугольника есть: 1) тангенс острого угла, если первый катет противолежит этому острому углу, или 2) котангенс острого угла, если первый катет служит стороной этого острого угла.

**§ 21.** Из равенства (1) § 20 следует: $a = c \cdot \sin A$, но $\sin A$ можно заменить, по § 17, через $\cos B$, так как $A + B = 90°$; тогда будем иметь: $a = c \cdot \cos B$

Таким образом: *катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего катету угла или на косинус прилежащего.*

Из равенства (3) § 20 следует: $a = b \cdot \operatorname{tg} A$, а заменяя $\operatorname{tg} A$ через $\operatorname{ctg} B$, получим ещё $a = b \cdot \operatorname{ctg} B$.

Таким образом: *катет равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету, или на котангенс угла, прилежащего к первому катету.*

С помощью равенства: $\frac{a}{c} = \sin A$ и $\sin A = \cos B$ получим:

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B}.$$

Таким образом: *гипотенуза равна катету, разделённому на синус противолежащего ему угла или на косинус прилежащего.*

**§ 22. Примеры, поясняющие решение треугольников. Понятие о таблицах.** Для решения треугольников, кроме тригонометрических формул, необходимо иметь ещё таблицы, чтобы по данному углу находить значение тригонометрической функции этого угла, и обратно, по данному значению тригонометрической функции находить соответствующий угол. Наиболее известны „Четырёхзначные математические таблицы" В. Брадиса и „Пятизначные таблицы" Е. Пржевальского. В примерах этого параграфа мы будем пользоваться трёхзначными таблицами, помещёнными в конце задачника по тригонометрии Рыбкина.

**Пример 1.** Положим, что в прямоугольном треугольнике $ABC$ дано: $AB = 5$ *см* и $\angle A = 24°$; требуется решить треугольник, т. е. вычислить $BC$, $AC$ и $\angle B$.

Решение. Имеем $B = 90° - A = 66°$. Далее находим по § 21 : $a = c \cdot \sin A = 5 \cdot \sin 24°$ и $b = c \cdot \cos A = 5 \cdot \cos 24°$; подставляя теперь из трёхзначной таблицы [1]) значения для $\sin 24°$ и $\cos 24°$, получим: $a = 5 \cdot 0{,}407 = 2{,}035$ и $b = 5 \cdot 0{,}914 = 4{,}57$. Таким образом, $BC = 2{,}035$ *см* и $AC = 4{,}57$ *см*.

Сделаем проверку: $a^2 = 2{,}035^2 = 4{,}1412$; $b^2 = 4{,}57^2 = 20{,}8849$; следовательно, $a^2 + b^2 = 25{,}0261$, а должно быть 25. Это несовпадение объясняется тем, что взятые нами значения функций были только приближённые.

**Пример 2.** Положим, что в прямоугольном треугольнике даны катеты: $a = 14$ и $b = 15$; требуется определить гипотенузу и углы.

Решение. По § 20 имеем: $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{14}{15}$; вычислив это отношение с тремя десятичными знаками, получим $\operatorname{tg} A = 0{,}933$; этому значению тангенса в таблице соответствует угол в 43°; таким образом, $A = 43°$, а следовательно, $B = 90° - A = 47°$. Найдём теперь гипотенузу, причём сделаем это тригонометрическим способом; по § 21 имеем: $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{41}{\sin 43°}$; подставляя из таблицы $\sin 43°$, найдём $c = 14 : 0{,}682 = 20{,}528$.

Сделаем проверку; по теореме Пифагора найдём:

$$c = \sqrt{14^2 + 15^2} = 20{,}518.$$

Проверка показывает, что произведённые вычисления не имеют значительной точности. Чтобы достигнуть большей точности, надо взять более подробные таблицы и с бо́льшим числом десятичных знаков; но тогда вычисления становятся уже затруднительными, и потому предпочитают производить эти вычисления при помощи логарифмов; а в таком случае и в таблицах выгоднее иметь не значения тригонометрических функций, а логарифмы этих значений. Так в действительности и составлено большинство таблиц. Таблицы же натуральных значений тригонометрических функций (т. е. значений самих функций) употребляются сравнительно редко.

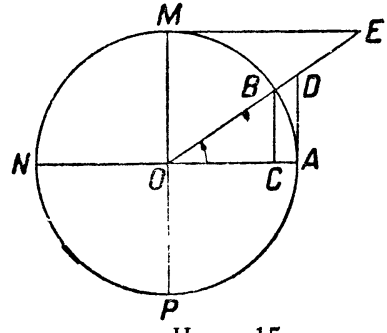
---

[1]) Н. Рыбкин, Сборник задач по тригонометрии, стр. 65.

В предыдущих примерах мы вовсе не касались косоугольных треугольников. Их решение легко сводится к решению прямоугольных треугольников. Для этого достаточно, проведя высоту в треугольнике, разбить его на два прямоугольных треугольника. Однако, как увидим дальше, для косоугольных треугольников существуют и другие способы решения.

## II. Тригонометрические функции углов от 90° до 360°.

**§ 23. Предварительные замечания.** Вместо четверти круга, как было раньше (черт. 1, стр. 8), возьмём теперь полный круг (черт. 15) и проведём в нём горизонтальный и вертикальный диаметры *NA* и *PM*. Эти диаметры разделят круг на четыре четверти (квадранта): *AOM* — первая четверть; *MON* — вторая четверть; *NOP* — третья четверть; *POA* — четвёртая четверть. Как и прежде, радиус *OA* считаем неподвижным радиусом, от которого начинается отсчёт углов; его конец *A* считаем началом отсчёта дуг. Углы, образованные вращением подвижного радиуса *OB* в направлении, обратном направлению движения часовой стрелки, считаем положительными; углы, образованные вращением подвижного радиуса в обратном направлении, считаем отрицательными.



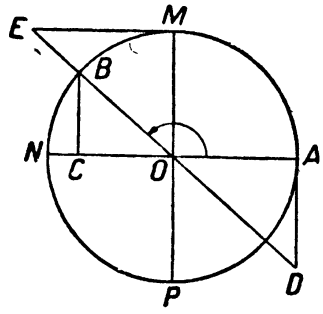
Черт. 15.

**§ 24. Построение тригонометрических линий.** Те определения тригонометрических линий, которые даны в § 5 для острого угла, распространим теперь и на углы, бо́льшие прямого.

Возьмём тупой угол *AOB* (черт. 16). Линией синуса для него будет перпендикуляр *BC*, опущенный из конца подвижного радиуса на продолжение неподвижного; линией косинуса будет *OC*. Линию тангенса получим, если из точки *A* проведём касательную и продолжим радиус *OB* так, чтобы они пересеклись; для этого придётся касательную направить вниз от точки *A*, а радиус *OB* продолжить за центр до пересечения с касательной; линией тангенса

будет тогда $AD$. Для получения линии котангенса надо из точки $M$ провести касательную до пересечения с продолжением радиуса $OB$, т. е. влево от точки $M$. Линией котангенса будет отрезок $ME$. Линиями секанса и косеканса будут $OD$ и $OE$.

Точно так же строятся тригонометрические линии и в том случае, когда подвижный радиус находится в III или IV четверти (черт. 17 и 18).

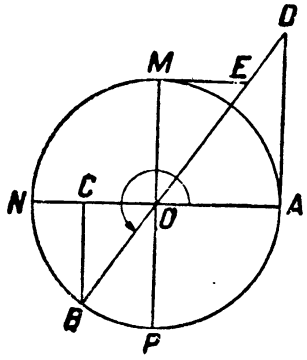


Черт. 16.

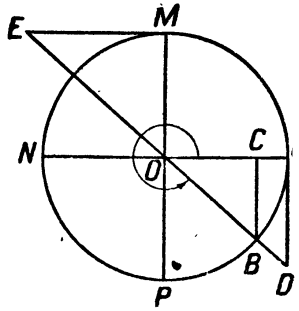
Сравнивая чертёж 15 с чертежами 16, 17 и 18, мы замечаем, что одноимённые тригонометрические линии имеют на них различные направления, а именно:

1) линия синуса ($BC$) в I и II четвертях направлена вверх от горизонтального диаметра, а в III и IV — вниз от него;

2) линия косинуса ($OC$) в I и IV четвертях направлена направо от центра, а во II и III — налево от него;



Черт. 17.



Черт. 18.

3) линия тангенса ($AD$) в I и III четвертях направлена от точки касания вверх, во II и IV — вниз;

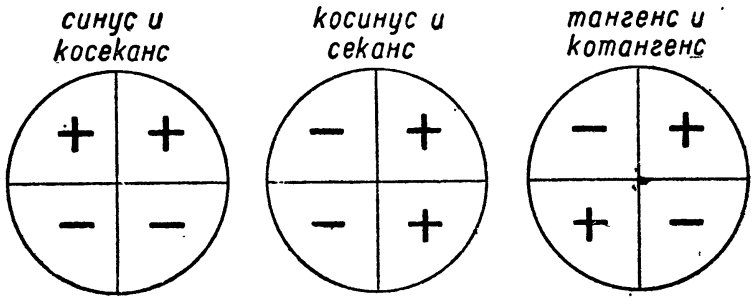
4) линия котангенса ($ME$) в I и III четвертях направлена от точки касания вправо, а во II и IV — влево;

5) линия секанса ($OD$) в I и IV четвертях идёт от центра в направлении подвижного радиуса, а во II и III — в направлении, противоположном подвижному радиусу;

6) линия косеканса ($OE$) в I и II четвертях идёт от центра в направлении подвижного радиуса, а в III и IV — в направлении, противоположном подвижному радиусу.

Таким образом, для любого угла каждая тригонометрическая линия имеет одно из двух направлений: или такое, как в I четверти, или противоположное ему.

**§ 25. Таблица тригонометрических функций.** В предыдущем параграфе было сказано, что каждая тригонометрическая линия может иметь одно из двух противоположных направлений: прямое (т. е. такое, как в I четверти) или противоположное ему. Для указания направлений тригонометрических линий пользуются знаками плюс и минус. Именно линии, имеющие прямое направление, считают положительными, а линии, имеющие противоположное направление, — отрицательными.




Черт. 19.

Так как тригонометрические функции представляют собой отношения тригонометрических линий к радиусу, а радиус мы будем всегда считать положительным, то знак всякой тригонометрической функции всегда совпадает со знаком первого члена отношения, т. е. со знаком соответствующей тригонометрической линии.

Если учесть это замечание, то для углов различных четвертей получим следующие знаки тригонометрических функций (см. черт. 19 и таблицу на стр. 26; угол считается принадлежащим той четверти, в которой лежит подвижный радиус, образующий сторону угла).

Таким образом, значения тригонометрических функций для углов от 0° до 360° состоят из двух элементов: знака и абсолютной величины, и, следовательно, это алгебраические числа. Так, если на чертеже 17 $\angle AOB = \alpha$, $R = 1{,}2$ *см*

и $BC = 0{,}9$ *см*, то $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$. Наконец, что касается обобщённого определения тригонометрических функций, то его можно выразить так: *значения тригонометрических функций суть положительные или отрицательные числа, показывающие отношение тригонометрических линий к радиусу и направление этих линий.*

На чертеже 19 показаны знаки тригонометрических функций по четвертям.

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| sin | $+\frac{BC}{R}$ | $+\frac{BC}{R}$ | $-\frac{BC}{R}$ | $-\frac{BC}{R}$ |
| cos | $+\frac{OC}{R}$ | $-\frac{OC}{R}$ | $-\frac{OC}{R}$ | $+\frac{OC}{R}$ |
| tg | $+\frac{AD}{R}$ | $-\frac{AD}{R}$ | $+\frac{AD}{R}$ | $-\frac{AD}{R}$ |
| ctg | $+\frac{ME}{R}$ | $-\frac{ME}{R}$ | $+\frac{ME}{R}$ | $-\frac{ME}{R}$ |
| sec | $+\frac{OD}{R}$ | $-\frac{OD}{R}$ | $-\frac{OD}{R}$ | $+\frac{OD}{R}$ |
| cosec | $+\frac{OE}{R}$ | $+\frac{OE}{R}$ | $-\frac{OE}{R}$ | $-\frac{OE}{R}$ |

**§ 26. Построение угла по данному значению тригонометрической функции.** Значение функции может быть как положительным, так и отрицательным.

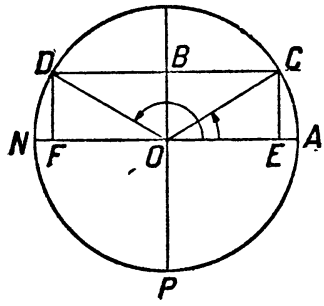
Для построения мы будем теперь пользоваться полным кругом (произвольного радиуса) с двумя главными диаметрами; знак функции укажет нам направление тригонометрической линии, а абсолютная величина функции — её отношение к радиусу.

Обратимся к примерам.

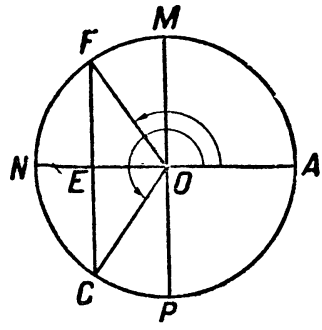
**Пример 1.** Построить угол $x$, если $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. Так как значение синуса положительно, то линия синуса должна быть в верхнем полукруге, а её длина должна составлять половину радиуса. Поэтому поступаем так (черт. 20): выше горизонтального диаметра проводим параллель к нему на расстоянии $OB=\frac{1}{2}R$; она пересечёт окружность в двух точках ($C$ и $D$). Соединяя центр круга $O$ с точками $C$ и $D$, получим два угла:

$$x_1=\angle AOC \quad \text{и} \quad x_2=\angle AOD.$$




Черт. 20.




Черт. 21.

Эти два угла удовлетворяют поставленному условию, так как:

$$\sin AOC=\frac{CE}{R}=\frac{\frac{1}{2}R}{R}=\frac{1}{2}; \quad \sin AOD=\frac{DF}{R}=\frac{\frac{1}{2}R}{R}=\frac{1}{2}.$$

**Пример 2.** Построить угол $x$, если $\cos x=-\frac{3}{5}$.

Решение. Значение косинуса дано отрицательное, следовательно, линия косинуса должна быть направлена влево: в ней должно быть три таких части, каких в радиусе пять. Поэтому отложим (черт. 21) $OE=\frac{3}{5}R$, после чего через $E$ проведём прямую $CF$, перпендикулярную к горизонтальному диаметру. Прямая $CF$ пересекает окружность в двух точках ($F$ и $C$). Искомые углы: $x_1=\angle AOF$ и $x_2=\angle AOC$ ($>180°$).

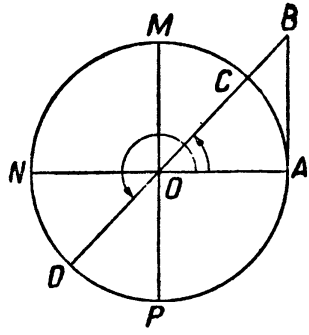
**Пример 3.** Построить угол $x$, если $\operatorname{tg} x=1$.

Решение. Сначала построим линию тангенса: она должна идти вверх от точки $A$ (так как данное значение тангенса положительно), а её длина должна быть равна

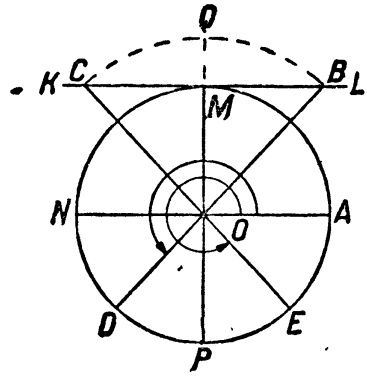
радиусу; проводим поэтому касательную $AB = R$. Через точку $B$ должно проходить продолжение подвижного радиуса; проводим поэтому из $B$ через центр окружности секущую $BCOD$ (черт. 22). Она пересекает окружность в двух точках $C$ и $D$. Углы $x_1 = \angle AOC$ и $x_2 = \angle AOD$ ($> 180°$) удовлетворяют поставленному условию.

**Пример 4.** Построить угол $x$, если $\operatorname{cosec} x = -\frac{4}{3}$.

Решение. Линия косеканса должна иметь начало в центре круга, конец — на касательной $KL$, а её длина равна $\frac{4}{3}R$; поэтому из центра $O$ радиусом $OQ = \frac{4}{3}R$ (черт. 23) описываем дугу, которая пересечёт $KL$ в точках $B$ и $C$;



Черт. 22.



Черт. 23.

$OB$ и $OC$ — два возможных положения линии косеканса. Так как данное значение косеканса отрицательно, то направления $OB$ и $OC$ должны быть противоположны направлению подвижного радиуса. Поэтому подвижный радиус должен иметь положение $OD$ или $OE$, а угол $x$ есть или угол $AOD$ ($> 180°$), или угол $AOE$ ($> 270°$).

Предоставляем самому учащемуся проделать построение и в других случаях (взяв, например, $\sin x = -\frac{3}{5}$; $\cos x = \frac{3}{4}$; $\operatorname{tg} x = -2$; $\operatorname{ctg} x = \frac{7}{4}$; $\operatorname{ctg} x = -3$; $\sec x = 2$; $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{4}$).

Что касается результатов построения, то важно заметить, что ответов теперь получается не один, а два, что соответствует тому, что в таблице § 25 у каждой функции каждый знак встречается в двух четвертях.

**§ 27. Распространение формул § 12.** Покажем, что соотношения между функциями одного угла, выведенные нами для I четверти, будут верны и для других четвертей.

Подобие прямоугольных треугольников *OBC*, *ODA* и *EOM*, которыми мы пользовались в § 12, существует не только в I четверти, но и в остальных четвертях (черт. 15—18), а потому геометрические соотношения, полученные нами в § 12, останутся в силе и теперь. Таким образом, во всех четвертях:

$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2+\left(\frac{OC}{R}\right)^2=1; \tag{1}$$

$$\frac{AD}{R}=\frac{BC}{R}:\frac{OC}{R}; \tag{2}$$

$$\frac{ME}{R}=\frac{OC}{R}:\frac{BC}{R}; \tag{3}$$

$$\frac{OD}{R}\cdot\frac{OC}{R}=1; \tag{4}$$

$$\frac{OE}{R}\cdot\frac{BC}{R}=1. \tag{5}$$

Здесь не приняты во внимание направления отрезков, т. е. их знаки. Но, просматривая таблицу § 25 по отдельным четвертям, видим, что от присоединения требуемых знаков равенства (1)—(5) не нарушатся. Действительно: в равенстве (1) можно в скобках приписывать любые знаки благодаря чётности показателей; равенства (2) и (3) не нарушатся вследствие того, что, как видно на чертежах 15—18, отрезки *AD* и *ME* положительны тогда, когда угол принадлежит I и III четвертям; линии же *CB* и *OC* имеют в этих четвертях одинаковые знаки (в I четверти они обе положительны; в III четверти — обе отрицательны). Отрезки *AD* и *ME* отрицательны во II и IV четвертях, когда отрезки *CB* и *OC* имеют разные знаки. Точно так же знаки отрезков *OD* и *OC* в равенстве (4), а также отрезков *OE* и *BC* в равенстве (5) не нарушают этих равенств, так как (что видно из чертежей 15—18) отрезки *OD* и *OC*, а также *OE* и *BC* всегда имеют одинаковые знаки, так что их произведение всегда положительно [1]).

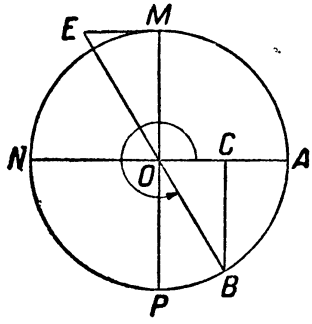
[1]) Можно было также воспользоваться таблицей § 25, из которой видно, что там, где синус и косинус имеют одинаковые знаки (в I и III четвертях), тангенс и котангенс положительны, а где синус и косинус имеют разные знаки (во II и IV четвертях), там тангенс и котангенс отрицательны.

Теперь мы вправе заменить отношения

$$\frac{BC}{R},\ \frac{OC}{R},\ \frac{AD}{R},\ \frac{ME}{R},\ \frac{OD}{R},\ \frac{OE}{R}$$

обозначениями соответствующих функций $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$. Мы получим формулы (I) — (V) (§ 12), но теперь уже для углов любой величины от 0° до 360°.

Итак, формулы (I) — (V) (§ 12) распространяются и на углы, бóльшие прямого; это будет верно и для формул (VI) — (VIII) (§ 14), потому что они получаются из формул (I) и (V) как их следствия.



Черт. 24.

**Пример.** Для наглядности разберём хотя бы один случай более подробно. Выведем, например, формулу $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ для IV четверти.

По чертежу 24:

$$\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{ME}{R};\quad \cos\alpha=+\frac{OC}{R}$$

и

$$\sin\alpha=-\frac{BC}{R}. \qquad (a)$$

Так как $\triangle OME\sim\triangle OBC$, то $\frac{ME}{OM}=\frac{OC}{BC}$, а отсюда:

$$\frac{ME}{R}=\frac{\left(\frac{OC}{R}\right)}{\left(\frac{BC}{R}\right)}. \qquad (b)$$

Припишем здесь нужные нам знаки: они таковы, что равенство от этого не нарушится [см. (a)], получим:

$$-\frac{ME}{R}=\frac{\left(+\frac{OC}{R}\right)}{\left(-\frac{BC}{R}\right)},\quad \text{т. е.}\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

**§ 28. Применение формул (I) — (VIII).** Это применение несколько отличается от сделанного в § 15, как покажут примеры.

**Пример 1.** Найти $\operatorname{cosec}\alpha$, зная, что $\alpha$ — угол IV четверти [1]) и $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{15}{8}$.

[1]) Т. е. подвижный радиус угла $\alpha$ находится в IV четверти.

Решение. По формуле (VIII) имеем:

$$\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{289}{64}.$$

Так как косеканс в IV четверти отрицателен, то далее напишем:

$$\operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{\frac{289}{64}} = -\frac{17}{8}.$$

**Пример 2.** Выразить $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$.

Решение. Из формулы (I) находим $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, и так как косинус может иметь и положительные и отрицательные значения, а данных для выбора знака у нас нет, то принимаем

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

**Пример 3.** Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, найти значения остальных функций этого угла.

Решение. Вычисляем по тому же плану, как в § 15, но, определяя $\sec\alpha$, при извлечении корня сохраняем оба знака, потому что при отрицательном значении тангенса значение секанса может быть как положительным (IV четверть), так и отрицательным (II четверть); отсюда уже получим соответственно по два значения и для остальных функций угла $\alpha$ (за исключением котангенса, знак которого всегда совпадает со знаком тангенса).

Окончательно будем иметь:

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3};\ \sec\alpha = \pm\frac{5}{4};\ \cos\alpha = \pm\frac{4}{5};\ \sin\alpha = \mp\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \mp\frac{5}{3},$$

или, выписывая каждый ответ отдельно:

1) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3};\ \sec\alpha = +\frac{5}{4};\ \cos\alpha = +\frac{4}{5};\ \sin\alpha = -\frac{3}{5};$ $\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{3};$

2) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3};\ \sec\alpha = -\frac{5}{4};\ \cos\alpha = -\frac{4}{5};\ \sin\alpha = +\frac{3}{5};$ $\operatorname{cosec}\alpha = +\frac{5}{3}.$

(Первый ответ относится к IV четверти, а второй — ко II четверти.)

§ 29. **Изменение тригонометрических функций с возрастанием угла от 0° до 360°.** Изменение функций при возрастании угла от 0° до 90° было уже рассмотрено раньше, в § 9. Для изменения угла от 90° до 180°, от 180° до 270° и от 270° до 360° воспользуемся соответственно чертежами 16, 17 и 18 (§ 24), а именно: определив сначала знак функции, будем относительно абсолютной величины её значения соображать так же, как и в § 9. Окончательные результаты представлены ниже в таблице, в которой как для аргумента, так и для функции показаны только крайние значения в каждой четверти; между ними функция или только растёт, или только убывает.

| | I $0°\ldots 90°$ $\left(0\ldots\frac{1}{2}\pi\right)$ | II $90°\ldots 180°$ $\left(\frac{1}{2}\pi\ldots\pi\right)$ | III $180°\ldots 270°$ $\left(\pi\ldots\frac{3}{2}\pi\right)$ | IV $270°\ldots 360°$ $\left(\frac{3}{2}\pi\ldots 2\pi\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| sin | $0\ldots+1$ | $+1\ldots 0$ | $0\ldots-1$ | $-1\ldots 0$ |
| cos | $+1\ldots 0$ | $0\ldots-1$ | $-1\ldots 0$ | $0\ldots+1$ |
| tg | $0\ldots+\infty$ | $-\infty\ldots 0$ | $0\ldots+\infty$ | $-\infty\ldots 0$ |
| ctg | $+\infty\ldots 0$ | $0\ldots-\infty$ | $+\infty\ldots 0$ | $0\ldots-\infty$ |
| sec | $+1\ldots+\infty$ | $-\infty\ldots-1$ | $-1\ldots-\infty$ | $+\infty\ldots+1$ |
| cosec | $+\infty\ldots+1$ | $+1\ldots+\infty$ | $-\infty\ldots-1$ | $-1\ldots-\infty$ |

Так как тригонометрические функции выражаются теперь относительными числами, то увеличение и уменьшение функции надо отличать от увеличения и уменьшения её абсолютной величины; например, с возрастанием аргумента от 90° до 180° абсолютная величина косинуса увеличивается, но сам косинус, будучи здесь числом отрицательным, с увеличением абсолютной величины, наоборот, уменьшается. Точно так же с возрастанием аргумента в алгебраическом смысле тангенс всегда увеличивается, а котангенс уменьшается.

К полученному выше добавим ещё несколько указаний.

I. Из таблицы видно, в каких границах изменяется каждая функция; отметим это:

1) синус и косинус изменяются от $-1$ до $+1$ (так что их абсолютная величина никогда не превышает единицы);

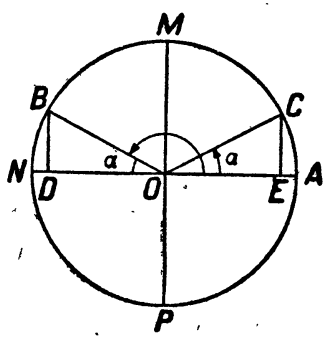
2) тангенс и котангенс изменяются между $-\infty$ и $+\infty$ (поэтому любое число может быть значением тангенса и котангенса);

3) секанс и косеканс изменяются от $+1$ до $+\infty$ и от $-1$ до $-\infty$ (следовательно, их абсолютная величина не бывает менее единицы).

II. Обратим внимание на двойственность некоторых результатов. Так, мы видим, что $\operatorname{tg} 90^\circ = +\infty$, если $90^\circ$ получено увеличением острого угла, и $\operatorname{tg} 90^\circ = -\infty$, если $90^\circ$ получено уменьшением тупого угла; если неизвестно, каким образом угол достигает $90^\circ$, то придётся написать $\operatorname{tg} 90^\circ = \pm\infty$. Точно так же будем иметь $\operatorname{ctg} 180^\circ = \pm\infty$ и т. п.

*Замечание.* Освоившись по чертежу с изменениями синуса и косинуса, изменения остальных функций легко проследить и без чертежа — по их зависимости от синуса и косинуса. Так, например, изменения $\operatorname{tg}\alpha$ можно рассматривать как изменение дроби $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, изменения $\sec\alpha$ — как изменение дроби $\frac{1}{\cos\alpha}$ и т. п.

**§ 30. Формулы приведения.** Тригонометрические функции углов, бо́льших прямого, легко приводятся к функциям острого угла. Для этой цели служат те два о с т р ы х угла, которые подвижный радиус образует с горизонтальным и вертикальным диаметрами (эти углы в сумме составляют $90^\circ$); так, если на чертеже 25 $\angle AOB = 143^\circ$, то указанные острые углы суть: $\angle BON = 37^\circ$ и $\angle MOB = 53^\circ$, и можно перейти к функциям любого из них. Как это делается, рассмотрим сначала на примерах.



Черт. 25.

**Пример 1.** Функции тупого угла привести к функциям острого угла, дополняющего тупой угол до $180^\circ$. На чертеже 25 для тупого угла $AOB$ дополнением до $180^\circ$ служит острый угол $BON$, величину которого обозначим через $\alpha$;

тогда $\angle AOB = 180° - \alpha$. Чтобы для угла $\alpha$ построить тригонометрические линии, мы должны сперва отложить его от общего начала $OA$; пусть $\angle AOC = \alpha$. Проведя линии синуса $BD$ и $CE$, получим: $\sin(180° - \alpha) = +\frac{BD}{R}$ и $\sin\alpha = +\frac{CE}{R}$; так как $BD = CE$, то:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha. \qquad (a)$$

Далее,

$$\cos(180° - \alpha) = -\frac{OD}{R} \qquad (1)$$

и

$$\cos\alpha = +\frac{OE}{R}; \qquad (2)$$

здесь правые части, имея равные абсолютные величины (так как $OD = OE$), различаются знаками; чтобы уравнять их вполне, не изменяя равенства (1), умножим обе части равенства (2) на $-1$, отчего получим:

$$-\cos\alpha = -\frac{OE}{R}. \qquad (3)$$

В равенствах (1) и (3) правые части равны; следовательно:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (b)$$

С помощью формул (a) и (b) находим для остальных функций (по § 27 и 12):

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = \frac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\sec(180° - \alpha) = \frac{1}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\frac{1}{\cos\alpha} = -\sec\alpha;$$

$$\operatorname{cosec}(180 - \alpha) = \frac{1}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha.$$

**Пример 2.** Функции тупого угла привести к функциям острого угла. На чертеже 26 угол $AOB$ можно рассматри-

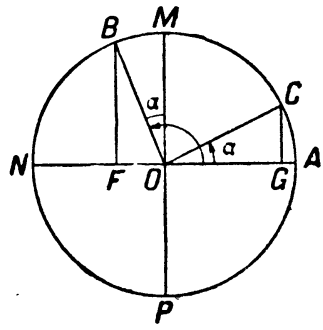
вать как $90° + \alpha$, обозначая через $\alpha$ величину угла $MOB$. Отложив от общего начала $\angle AOC = \alpha$ и проведя линии синуса $BF$ и $CG$, будем иметь:

$$\sin(90° + \alpha) = + \frac{BF}{R}; \quad (1)$$

$$\cos(90° + \alpha) = - \frac{OF}{R}; \quad (2)$$

$$\sin\alpha = + \frac{CG}{R}; \quad (3)$$

$$\cos\alpha = + \frac{OG}{R}. \quad (4)$$



Черт. 26.

Так как $BF = OG$, то

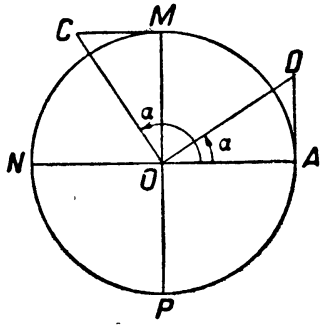
$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha. \quad (a)$$

Так как $OF = CG$, то, умножив обе части равенства (3) на $-1$, увидим, что

$$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha. \quad (b)$$

Из равенств (a) и (b) можно сделать вывод для остальных функций тем же путём, как в примере 1; получится:

$$\operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\sec(90° + \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(90° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{cosec}(90° + \alpha) = \sec\alpha.$$



Черт. 27.

**Пример 3.** Привести $\operatorname{ctg}(90° + \alpha)$ к функции угла $\alpha$ (не сводя котангенс к другим функциям того же угла) (черт. 27). Проведя для угла $AOC$ линию котангенса $MC$, получим треугольник $MOC$. Потом отложим угол $\alpha$ от общего начала и построим треугольник, равный полученному; таким будет треугольник $AOD$. Тогда имеем:

$$\operatorname{ctg}(90° + \alpha) = - \frac{MC}{R}; \quad (1)$$

$$MC = AD; \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = + \frac{AD}{R}; \quad (3)$$

$$-\operatorname{tg}\alpha = - \frac{AD}{R}. \quad (4)$$

Из равенств (1), (2) и (4) следует:

$$\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

**Пример 4.** Привести $\sec(180^\circ + \alpha)$ к функциям угла $\alpha$. Из чертежа 28 имеем:

$$\sec(180^\circ + \alpha) = -\frac{OD}{R}; \qquad (1)$$

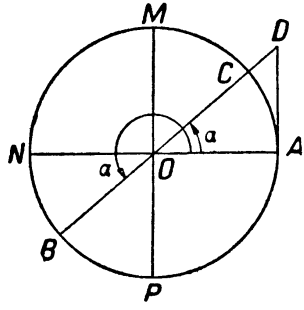
$$\sec\alpha = +\frac{OD}{R}; \qquad (2)$$

$$-\sec\alpha = -\frac{OD}{R}. \qquad (3)$$

Из равенств (1) и (3) следует:

$$\sec(180^\circ + \alpha) = -\sec\alpha.$$

**Правила и примеры.** Разбор всех случаев ($90^\circ \mp \alpha$, $180^\circ \mp \alpha$, $270^\circ \mp \alpha$, $360^\circ - \alpha$) дал бы нам 42 формулы приведения[1]), но все они сводятся к следующему простому правилу:



Черт. 28.

*1) если приводимая функция имеет отрицательное значение, то надо функцию острого угла умножить на — 1;*

*2) название приводимой функции сохраняется, если острый угол взят при горизонтальном диаметре, и меняется на сходное, если острый угол взят при вертикальном диаметре.*

Приложим это правило к примерам:

1) Привести к функциям острого угла $\operatorname{tg} 130^\circ$. Так как $130^\circ = 180^\circ - 50^\circ = 90^\circ + 40^\circ$, то $\operatorname{tg} 130^\circ$ можно привести и к функции угла $50^\circ$ и к функции угла $40^\circ$. Зная, что $\operatorname{tg} 130^\circ$ отрицателен, и помня, что угол $50^\circ$ отсчитывается от горизонтального диаметра, а угол $40^\circ$ — от вертикального, напишем:

$$\operatorname{tg} 130^\circ = -\operatorname{tg} 50^\circ \text{ и } \operatorname{tg} 130^\circ = -\operatorname{ctg} 40^\circ.$$

2) Привести $\sec 295^\circ$ к функции острого угла, не превышающего $45^\circ$. Имеем: $295^\circ = 360^\circ - 65^\circ = 270^\circ + 25^\circ$; следовательно, требуемый угол есть $25^\circ$. Так как $\sec 295^\circ$ имеет положительное значение и угол $25^\circ$ отсчитывается от

[1]) Это название употребляется и по отношению к формулам § 17.

вертикального диаметра, то по правилу получим: $\sec 295° = \operatorname{cosec} 25°$.

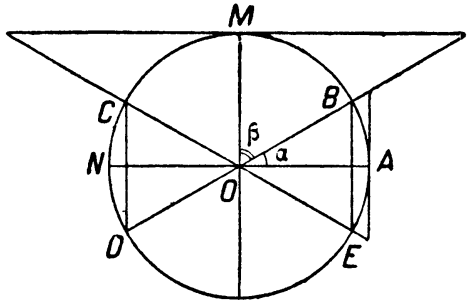
3) Ещё примеры:

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$;

b) $\operatorname{tg} 1{,}2\pi = \operatorname{tg}(\pi + 0{,}2\pi) = \operatorname{tg} 0{,}2\pi$;

c) $\sin 240° = \sin(180° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**§ 31. Другой вывод формул приведения.** 1) Предварительно обратим внимание на то, что отношение тригонометрической линии к радиусу представляет собой для первой четверти всегда значение функции, а для остальных четвертей иногда только абсолютную величину значения функции [1]). Обратимся теперь к чертежу 29. Сравнивая тригонометрические линии дуг *AMC*, *AMND*, *AMNDE* с тригонометрическими линиями дуги *AB*, видим, что они или одни и те же, или соответственно равны. Отсюда заключаем, что для дуг $180° - \alpha$, $180° + \alpha$ и $360° - \alpha$ абсолютные величины функций соответственно равны функциям дуги $\alpha$.



Черт. 29.

2) Так как выражения: $180° - \alpha$, $180° + \alpha$ и $360° - \alpha$ можно заменить через: $90° + \beta$, $270° - \beta$, $270° + \beta$, а функции дуги $\alpha$ равны сходным функциям дуги $\beta$ (как дополнительной), то на основании п. I заключаем, что для дуг: $90° + \beta$, $270° - \beta$ и $270° + \beta$ абсолютные величины функций равны сходным функциям дуги $\beta$.

3) Из 1) и 2) вместе следует: чтобы составить какую-нибудь формулу приведения, надо для приводимой функции определить знак и абсолютную величину, взяв за абсолютную величину функцию острого угла; при этом название приводимой функции следует сохранить, если её аргумент содержит в своём составе 180° или 360°, и изменить на сходное, если аргумент содержит 90° или 270°. Так, получим: $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\operatorname{tg}(360° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\cos(270° - \beta) = -\sin\beta$ и т. д.

**§ 32. Вычисление угла по данному значению тригонометрической функции (в пределах от 0° до 360°).** Мы уже видели в § 26, что при построении угла, соответствующего данному значению тригонометрической функции, получаются два угла, принадлежащие каким-нибудь двум четвертям. Величину этих углов можно определить по формулам приведения, пользуясь этими формулами в обратном смысле.

---

[1]) Когда эта функция отрицательна.

Пóясним это на примерах:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; найти угол $x$. Первый ответ: $x_1 = 30°$; второй угол, имеющий данный синус, это угол II четверти:

$$180° - 30° = 150°;$$

второй ответ: $x_2 = 150°$.

2) $\cos x = 0{,}974$; найти угол $x$. Из таблиц имеем: $x_1 = 13°$; кроме того, положительное значение косинуса имеется ещё в IV четверти:

$$x_2 = 360° - 13° = 347°.$$

3) $\operatorname{tg} x = 1$; найти угол $x$. Соответствующий острый угол есть 45°; $x_1 = 45°$. По чертежу 22 (стр. 28) видно, что $x_2 = 180° + 45° = 225°$.

4) $\sin x = -\frac{1}{2}$; найти угол $x$. Отрицательные значения синуса имеются в III и IV четвертях; зная, что $\sin 30° = +\frac{1}{2}$, заключаем, что искомый угол $x_1 = 180° + 30° = 210°$;

$$x_2 = 360° - 30° = 330°.$$

## III. Углы отрицательные. Углы, бóльшие 360°.

**§ 33. Об отрицательных углах.** Если рассматривают не только величину угла, но и направление, в котором он отсчитывается, то величину угла, образованного вращением, обратным обычному, выражают отрицательным числом[1]).

Отрицательным углам будут соответствовать и отрицательные дуги: такими должны считаться дуги, описываемые концом $B$ подвижного радиуса при вращении его по направлению движения часовой стрелки.

Тригонометрические функции для отрицательного угла определяются точно так же, как для примыкающего к нему положительного угла. Так, по чертежу 30 получится:

$$\sin(-\alpha) = -\frac{BC}{R};\ \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\frac{ME}{R};\ \sec(-\alpha) = +\frac{OD}{R}$$

и т. д.

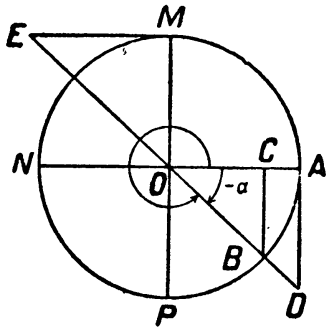
---

[1]) Для краткости мы будем называть такие углы просто отрицательными углами.

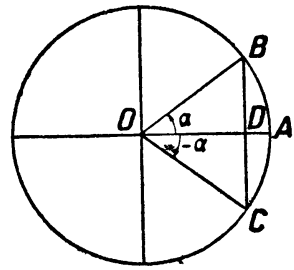
**§ 34.** Найдём зависимость между функциями отрицательного угла и такого же по абсолютной величине положительного.

По чертежу 31 имеем:

$$\sin(-\alpha) = -\frac{CD}{R} \text{ и } \sin\alpha = +\frac{BD}{R};$$




Черт. 30.




Черт. 31.

замечая, что $CD = BD$, и умножая обе части второго равенства на $-1$, получим: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Далее:

$$\cos(-\alpha) = +\frac{OD}{R} \text{ и } \cos\alpha = +\frac{OD}{R};$$

следовательно, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Итак,

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \text{ и } \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Отсюда найдём:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

и тем же способом:

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

***Правило.*** *В случае косинуса и секанса минус в аргументе можно опустить, а в остальных случаях минус у аргумента можно вынести за знак функции*[1]).

---

[1]) По аналогии с возведением отрицательного числа в чётную или нечётную степень, синус, тангенс, котангенс и косеканс называются нечётными функциями, а косинус и секанс — чётными.

**Примеры:**

$\sin(-50°) = -\sin 50°$; $\cos(-50°) = \cos 50°$;

$\operatorname{tg}(-300°) = -\operatorname{tg} 300°$; $\sec(-300°) = \sec 300°$;

$\sin(\alpha - 90°) = \sin[-(90° - \alpha)] = -\sin(90° - \alpha) = -\cos\alpha$.

**§ 35. Об углах, превышающих 360°. Периодичность тригонометрических функций.** В теории тригонометрических функций рассматриваются также углы, превышающие 360° [1]).

С введением отрицательных углов и углов, превышающих 360°, угол является уже такой переменной величиной, которая может принимать всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

В § 29 было показано, как изменяются тригонометрические функции с возрастанием угла от 0° до 360°, т. е. при одном полном обороте подвижного радиуса. При дальнейшем возрастании угла подвижный радиус будет принимать положения, которые уже были пройдены им при первом вращении, а потому тригонометрические функции будут получать свои прежние значения в прежнем порядке. В случае отрицательных углов от $-360°$ до 0°, от $-720°$ до $-360°$ и т. д. функции пробегают те же значения, какие они пробегают при изменении угла от 0° до 360°.

Таким образом, при изменении угла от $-\infty$ до $+\infty$ значения тригонометрических функций периодически повторяются. Наименьшее положительное значение аргумента, начиная с которого *ход* изменения функции повторяется, называется *периодом* этой функции. Предыдущее рассуждение показывает, что после того, как угол достигает 360°, значения всех тригонометрических функций повторяются; остаётся только решить, будет ли этот промежуток наименьшим. Обращаясь для этого к таблице § 29, видим, что он не будет наименьшим только для тангенса и котангенса, у которых первое повторение наступает, начиная с угла в 180°; у остальных же функций до окончания полного оборота ход изменения не повторяется. Итак, тригонометрические функции — периодические, причём период синуса, косинуса, секанса и косеканса равен 360°, или $2\pi$, а период тангенса и котангенса равен 180°, или $\pi$.

---

[1]) С такими углами приходится иметь дело и в практике, например, при вращении зубчатых колёс, при кручении и пр.

**§ 36.** Если к аргументу периодической функции мы прибавим период, то, каково бы ни было значение аргумента, значение функции не изменится; обратно, если для данной функции существует такое п о с т о я н н о е количество, которое можно прибавлять ко в с я к о м у значению аргумента, не изменяя этим значения функции, то эта функция есть периодическая. На основании этого периодичность тригонометрических функций можно выразить следующими формулами, в которых $\alpha$ может иметь какое угодно значение от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\sin(\alpha+360^\circ)=\sin\alpha; \qquad \cos(\alpha+360^\circ)=\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+180^\circ)=\operatorname{tg}\alpha; \qquad \operatorname{ctg}(\alpha+180^\circ)=\operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\sec(\alpha+360^\circ)=\sec\alpha; \qquad \operatorname{cosec}(\alpha+360^\circ)=\operatorname{cosec}\alpha.$$

**Примеры:** 1) Упростить $m=\operatorname{tg}(\alpha-\pi)$. Прибавив к аргументу период тангенса, т. е. $\pi$, получим: $m=\operatorname{tg}\alpha$.

2) Упростить $n=\operatorname{ctg}\frac{19}{6}\pi$. Так как $\pi$ есть период котангенса, то отнимем $\pi$ от аргумента три раза; тогда

$$n=\operatorname{ctg}\frac{1}{6}\pi=\sqrt{3}.$$

**§ 37. Приведение тригонометрической функции любого угла к функциям наименьшего положительного аргумента.** Тригонометрические функции любого угла, каковы бы ни были его знак и абсолютная величина, легко приводятся к функциям положительного угла, не превышающего 45°.

а) Пусть будет дан положительный угол (больший 45°). Если он менее 360°, то применяем формулы § 17 и 30; если же он более 360°, то сначала исключаем из него все полные обороты, заменяя данный угол остатком от деления его на 360°.

Например:

1) $\sin 63^\circ=\cos(90^\circ-63^\circ)=\cos 27^\circ$;
2) $\cos 145^\circ=\cos(180^\circ-35^\circ)=-\cos 35^\circ$;
3) $\operatorname{tg}2085^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ\cdot 11+105^\circ)=\operatorname{tg}105^\circ=\operatorname{tg}(90^\circ+15^\circ)=$
$=-\operatorname{ctg}15^\circ$.

б) Если дан отрицательный угол, то сначала переходим к такому же по абсолютной величине положительному углу,

с которым и поступаем, как указано выше. Возьмём, например, $\sin(-1596°)$. Применяя формулы § 34, получим:

$$\sin(-1596°) = -\sin 1596°.$$

Преобразуем теперь $\sin 1596°$. Разделив 1596 на 360, получим в остатке 156; следовательно, $\sin 1596° = \sin 156°$. Но $\sin 156° = \sin(180° - 24°) = \sin 24°$.

Таким образом, окончательно:

$$\sin(-1596°) = -\sin 24°.$$

**§ 38. Общность формул приведения.** В § 17, 30 и 34 было показано, как приводятся к углу $\alpha$ тригонометрические функции следующих аргументов: $-\alpha$; $90° \mp \alpha$; $180° \mp \alpha$; $270° \mp \alpha$ и $360° - \alpha$; при этом предполагалось, что угол $\alpha$ — положительный острый. Покажем теперь, что полученные формулы обладают общностью, т. е. что они верны и в том случае, если под $\alpha$ будем понимать какой угодно угол, от $-\infty$ до $+\infty$. Достаточно обнаружить это для синуса и косинуса, потому что остальное получится как следствие.

При доказательстве мы воспользуемся, между прочим, тем, что линия косинуса есть проекция подвижного радиуса на горизонтальный диаметр, а линия синуса равна проекции подвижного радиуса на вертикальный диаметр.

Переходим к самому доказательству.

**§ 39.** 1. Пусть $\alpha$ означает какой угодно угол, тогда $-\alpha$ будет означать угол, равный углу $\alpha$ по абсолютной величине, но противоположный ему по знаку. Углы $\alpha$ и $-\alpha$ лежат по разные стороны от неподвижного радиуса, линии синуса у них по длине равны, но направлены противоположно, а линии косинуса совпадают; отсюда заключаем, что $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ и $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

**§ 40.** 2. а) Представим $90° + \alpha$ в виде $\alpha + 90°$. Если к какому-нибудь углу прибавить 90°, то подвижный радиус перейдёт в следующую четверть и составит с вертикальным диаметром такой же острый угол, какой раньше составлял с горизонтальным диаметром, и наоборот; поэтому его новая вертикальная проекция будет равна прежней горизонтальной, а новая горизонтальная проекция будет равна прежней вертикальной. Отсюда следует, что $\sin(\alpha + 90°)$ и $\cos(\alpha + 90°)$ имеют соответственно такую же абсолютную величину, как $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Что же касается знаков, то они будут определяться четвертью, к которой принадлежит угол $\alpha$:

| $\alpha + 90°$ | $\sin(\alpha + 90°)$ | $\cos\alpha$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| II | + | + | I |
| III | − | − | II |
| IV | − | − | III |
| I | + | + | IV |

| $\alpha + 90°$ | $\sin(\alpha + 90°)$ | $\sin\alpha$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| II | − | + | I |
| III | − | + | II |
| IV | + | − | III |
| I | + | − | IV |

Видим, что $\sin(\alpha + 90°)$ и $\cos\alpha$ имеют всегда одинаковые знаки, а $\cos(\alpha + 90°)$ и $\sin\alpha$ — всегда противоположные.

Таким образом:

$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha;$$
$$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha.$$

б) Применяя только что полученные формулы к углу $-\alpha$ и пользуясь § 39, найдём:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\cos(90° - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha.$$

**§ 41.** 3. а) Представим $180° + \alpha$ в виде $\alpha + 180°$. Если к какому-нибудь углу прибавить 180°, то подвижный радиус перейдёт в противоположную четверть и составит одну прямую со своим прежним положением [1]), следовательно, синус и косинус сохраняют свою абсолютную величину, а их знаки изменяются на противоположные; поэтому:

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha.$$

б) Применяя эти формулы к углу $-\alpha$, получим:

$$\sin(180° - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha;$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha.$$

**§ 42.** 4. а) Представим $270° + \alpha$ в виде $\alpha + 270°$. Если к какому-нибудь углу прибавить 270°, то подвижный радиус изменит своё положение так же, как от поворота на $-90°$. Рассуждая, как в § 40, придём к заключению, что проекция подвижного радиуса угла $\alpha + 270°$ на вертикальный диаметр по длине равна проекции подвижного радиуса угла $\alpha$ на горизонтальный диаметр. Точно так же проекция подвижного радиуса угла $\alpha + 270°$ на горизонтальный диаметр равна по длине проекции подвижного радиуса угла $\alpha$ на вертикальный диаметр. Поэтому абсолютные величины $\sin(\alpha + 270°)$ и $\cos(\alpha + 270°)$ соответственно равны абсолютным величинам $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

Для сравнения знаков этих функций для углов разных четвертей составим таблички по образцу таблицы § 40:

| $\alpha + 270°$ | $\sin(\alpha + 270°)$ | $\cos\alpha$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| IV | − | + | I |
| I | + | − | II |
| II | + | − | III |
| III | − | + | IV |

| $\alpha + 270°$ | $\cos(\alpha + 270°)$ | $\sin\alpha$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|
| IV | + | + | I |
| I | + | + | II |
| II | − | − | III |
| III | − | − | IV |

Видим, что $\sin(\alpha + 270°)$ и $\cos\alpha$ имеют всегда противоположные знаки, а $\cos(\alpha + 270°)$ и $\sin\alpha$ — одинаковые.

---

[1]) Или: конец дуги перейдёт в диаметрально противоположную точку.

Таким образом:

$$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha.$$

б) Применяя эти формулы к углу $-\alpha$, найдём:

$$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha;$$
$$\cos(270^\circ - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

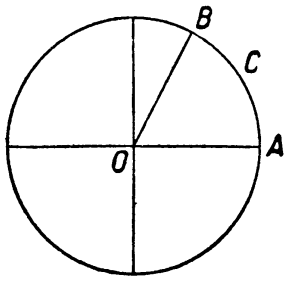
**§ 43.** 5. Представим $360^\circ - \alpha$ в виде $-\alpha + 360^\circ$. Если к какому-нибудь углу прибавить $360^\circ$, то окончательное положение подвижного радиуса не изменится; поэтому:

$$\sin(360^\circ - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

**§ 44.** В § 39—43 для угла $\alpha$ любой величины доказаны все те формулы, которые ранее, в § 17, 30, 34, были доказаны для положительного угла $\alpha$, не превышающего $90^\circ$. Этим самым общность формул приведения доказана.

В задачах, если требуется только припомнить формулу, надо представить себе величину $\alpha$ заключённой между $0^\circ$ и $90^\circ$ и применить правило, данное в § 30.

**§ 45. Общий вид дуг, имеющих конец в данной точке окружности.** Пусть на чертеже 32 дуга $ACB$ содержит $64^\circ$.



Черт. 32.

Очевидно, что все дуги, которые отличаются от $64^\circ$ на полное число окружностей, оканчиваются также в точке $B$ (предполагается, что началом всех дуг служит точка $A$).

Отсюда найдём, что дуги, имеющие конец в точке $B$, суть следующие: $64^\circ$, $424^\circ$, $784^\circ$, $1144^\circ$ и т. д., а также: $-296^\circ$, $-656^\circ$, $-1016^\circ$ и т. д. Все эти дуги можно выразить одной и той же формулой $64^\circ + 360^\circ \cdot n$, в которой $n$ есть произвольное целое число (оно может быть как положительным, так и отрицательным, а также нулём).

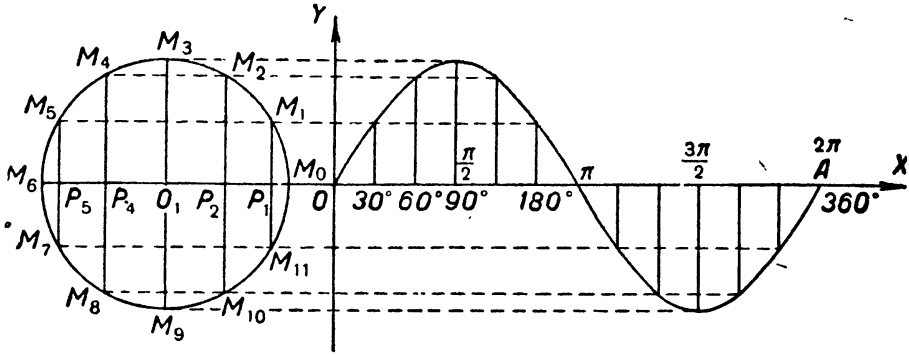
Вообще, если $\alpha$ есть одна из дуг, имеющих данные начало и конец, то о б щ и й в и д всех дуг, имеющих те же самые начало и конец, есть $\alpha + 360^\circ \cdot n$ (иначе $\alpha + 2\pi n$).

Мы говорили о дугах, но полученные формулы можно отнести и к углам, у которых начальный и конечный радиусы одни и те же.

**§ 46. Графики тригонометрических функций.** Изменения тригонометрических функций с изменением аргумента от $0^\circ$ до $360^\circ$ представлены в таблице § 29, но эта таблица содержит только ряд отдельных значений и поэтому не даёт полного представления о ходе непрерывного изменения

функций с изменением аргумента. Чтобы получить представление о непрерывном изменении функций, прибегают к графическому изображению их изменения.

С этой целью возьмём две взаимно перпендикулярные прямые линии $OX$ и $OY$, называемые осями координат (черт. 33). Вдоль оси $OX$ будем откладывать отрезки, изображающие в произвольном масштабе числовые значения аргумента, а вдоль оси $OY$ — отрезки, изображающие в том же или в другом произвольном масштабе числовые значения функции. При откладывании отрезков будем соблюдать правило знаков: положительные значения откладываются




Черт. 33.

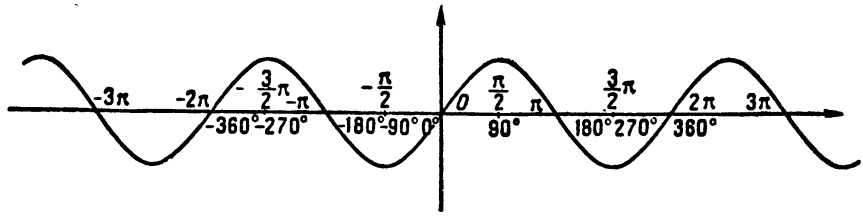
от начальной точки $O$ вправо и вверх, отрицательные — влево и вниз (положительные направления осей на чертежах отмечены стрелками).

По оси $OX$ отложим несколько равных отрезков, например 12; пусть каждый из них изображает угол в 30° $\left(\text{или } \frac{\pi}{6}\right)$; таким образом, все 12 отрезков, или расстояние $AO$, изображают угол в 360°, или $2\pi$. Чтобы на оси $OY$ отложить числовые значения тригонометрической функции, например синуса, начертим вспомогательную окружность с центром $O_1$, лежащим где-нибудь на оси $OX$. Радиус окружности $O_1M_0$ выберем равным отрезку, принятому за единицу масштаба на оси $OY$.

Начиная с точки $M_0$, делим окружность на 12 равных частей (по числу делений на оси $OX$), соответствующих углу в 360°. Для найденных точек делений $M_0$, $M_1$, ..., $M_{11}$ строим линии синуса $M_1P_1$, $M_2P_2$, ..., $M_{11}P_1$. Так как радиус окружности равен единице, то длины построенных

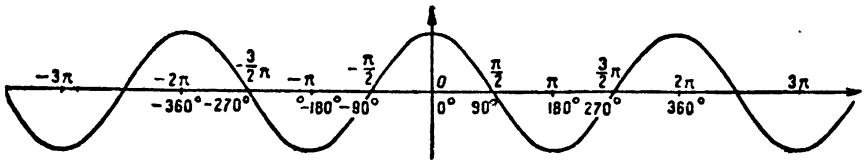
тригонометрических линий будут в принятом нами масштабе изображать числовые значения синуса. При помощи ряда прямых линий, параллельных оси $OX$, перенесём значение синуса на ось $OY$.

В каждой точке деления на оси $OX$ восставим перпендикуляры к оси $OX$ и на этих перпендикулярах отложим отрезки, выражающие соответствующие числовые значения синуса. Когда требуемые длины перпендикуляров будут




Черт. 34.

построены, надо через полученные концы их провести кривую линию. Эта линия, проходящая через концы отрезков, изображающих на чертеже числовые значения синуса, будет изображать изменение функции синуса с изменением аргу-




Черт. 35.

мента (дуги). Такая линия называется графиком функции.

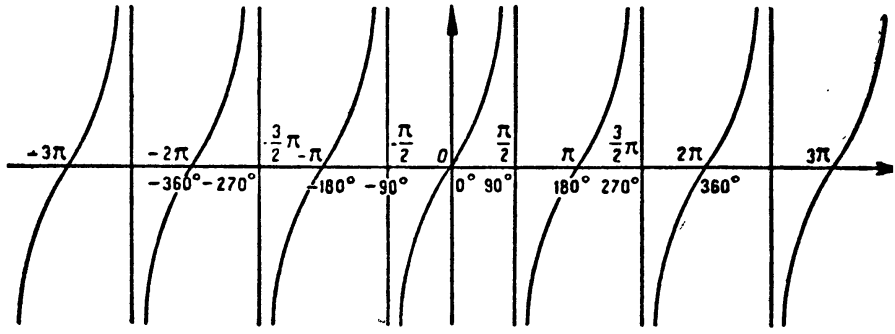
На чертеже 33 представлен график синуса для полного периода этой функции.

Чем больше точек деления мы возьмём, чем на большее число частей мы разделим отрезок $OA$ и вспомогательную окружность, тем больше точек графика мы получим и тем точнее его построим с помощью лекала.

Значения синуса можно находить не геометрическим построением, а взять из таблицы.

График синуса представляет собой кривую линию, называемую синусоидой.

График синуса, построенный для положительных углов в пределах одной окружности, можно распространить на любые значения углов как положительных, так и отрицательных. По образцу графика синуса можно построить график косинуса, тангенса, котангенса. На чертежах 34, 35, 36 представлены синусоида, косинусоида и тангенсоида для значений аргумента, заключённых между $-3\pi$ и $+3\pi$.




Черт. 36.

**§ 47. Общий вид углов, соответствующих данному значению тригонометрической функции.** В § 26 было указано, что данный тригонометрической функции соответствуют два положения подвижного радиуса; в § 32 им соответствовали д в а положительных угла $x_1$ и $x_2$, меньшие 360°. Но после введения углов любой величины ясно, что каждому положению радиуса будет соответствовать не один угол, а б е с к о н е ч н ы й р я д углов, положительных и отрицательных; таким образом, теперь данному значению функции будут соответствовать углы, составляющие два бесконечных ряда. Все эти углы можно выразить, по § 45, с помощью $x_1$ и $x_2$, а именно: общий вид углов одного ряда с $x_1$ есть $x_1 + 360° \cdot n$, а общий вид углов другого ряда: $x_2 + 360° \cdot n$.

Мы получили общее решение в виде двух формул с двумя основными углами. Покажем, что для каждой функции вместо этих двух формул может быть дана одна формула, в которую будет входить один основной угол; но при этом для различных функций мы получим различные формулы.

Перейдём к отдельным функциям (для простоты возьмём примеры с числовыми данными).

1. а) $\sin x = \frac{1}{2}$.

Искомый угол равен или 30°, или 150°; следовательно, будем иметь:

$$x_1 = 30° + 360° \cdot n \text{ и } x_2 = 150° + 360° \ n.$$

Эти выражения преобразуем так:

$$x_1 = 180° \cdot 2n + 30°;$$
$$x_2 = 180° - 30° + 180° \cdot 2n = 180° \cdot (2n + 1) - 30°.$$

Здесь знак перед 30° зависит от чётности ($2n$) или нечётности ($2n + 1$) множителя при 180°, а эту зависимость можно выразить с помощью степени отрицательной единицы; тогда вместо двух формул получим одну следующую:

$$x = 180° \cdot m + 30° \cdot (-1)^m,$$

где $m$ означает произвольное целое число, безразлично — чётное или нечётное. При $m$ чётном эта формула даёт $x_1$, а при $m$ нечётном $x_2$.

б) $\sin x = -\frac{1}{2}$; $x_1 = 210° + 360° \cdot n$ и $x_2 = 330° + 360° \cdot n$.

Можно уменьшить абсолютную величину основных углов, взяв для них отрицательные значения; тогда будем иметь:

$$x_1 = -150° + 360° \cdot k \text{ и } x_2 = -30° + 360° \cdot k,$$

или в другом виде:

$$x_1 = -150° + 180° \cdot 2k = -150° + 180° - 180° + 180° \cdot 2k = 30° + 180° \cdot (2k - 1)$$

и

$$x_2 = 180° \cdot 2k - 30°,$$

а эти две формулы можно соединить в одну следующую:

$$x = 180° \cdot m - 30° \cdot (-1)^m,$$

которая при $m$ чётном даёт $x_2$, а при $m$ нечётном $x_1$.

2. а) $\cos x = \frac{1}{2}$; $x_1 = 60° + 360° \cdot n$ и $x_2 = 300° + 360° \cdot n$.

Если же воспользуемся в качестве основных также отрицательными углами, то получим:

$$x_1 = 60° + 360° \cdot m \text{ и } x_2 = -60° + 360° \cdot m,$$

что можно написать слитно в виде:

$$x = 360° \cdot m \pm 60°.$$

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x_1 = 120° + 360° \cdot n$ и $x_2 = 240° + 360° \cdot n$.

Можно выразить $x_1$ и $x_2$ ещё следующими формулами:

$$x_1 = 120° + 360° \cdot m \text{ и } x_2 = -120° + 360° \cdot m,$$

а их можно написать слитно в виде:

$$x = 360° \cdot m \pm 120°.$$

3. а) $\operatorname{tg} x = 1$; $x_1 = 45° + 360° \cdot n$ и $x_2 = 225° + 360° \cdot n$, что можно представить в виде:

$$x_1 = 45° + 180° \cdot 2n \text{ и } x_2 = 45° + 180° \cdot (2n + 1);$$

а последние две формулы можно заменить одной следующей:

$$x = 45° + 180° \cdot m,$$

которая при $m$ чётном даёт $x_1$, а при $m$ нечётном $x_2$.

Формулы $x = 45° + 180° \cdot m$ легко получить ещё из следующего: чертёж 22 (стр. 28), в котором точки $C$ и $D$ лежат на одном диаметре, показывает, что в ряде дуг всевозможной величины, от $-\infty$ до $+\infty$, дуги, имеющие один и тот же тангенс, встречаются через каждые 180°; таким образом, искомые дуги составят арифметическую прогрессию с разностью 180°; о б щ и м ч л е н о м этой прогрессии и будет

$$x = 45° + 180° \cdot m.$$

б) $\operatorname{tg} x = -1$.

Рассуждая так же, как в п. а), получим:

$$x_1 = 135° + 360° \cdot n \text{ и } x_2 = 315° + 360° \cdot n,$$

или:

$$x = 135° + 180° \cdot m,$$

или ещё:

$$x = -45° + 180° \cdot k.$$

4. а) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

Вопрос решается совершенно так же, как и в случае тангенса.

Получим:

$$x_1 = 30° + 360° \cdot n \text{ и } x_2 = 210° + 360° \cdot n,$$

или:

$$x = 30° + 180° \cdot m.$$

б) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Рассуждая, как и в случае тангенса, найдём:

$$x_1 = 150° + 360° \cdot n \text{ и } x_2 = 330° + 360° \cdot n;$$

или:

$$x = 150° + 180° \cdot m,$$

а также $x = -30° + 180° \cdot k$

5 и 6. Если даны секанс и косеканс, то сначала переходим соответственно к косинусу или синусу.

**§ 48. Обратные круговые функции.** Если мы имеем одно уравнение с двумя неизвестными, то из него, вообще говоря, можно определить любое неизвестное через другое. Например, если имеем: $2x + 3y = 6$, то:

$$\text{а) } y = 2 - \frac{2}{3}x; \quad \text{б) } x = 3 - \frac{3}{2}y.$$

Первое уравнение даёт выражение $y$ в функции $x$. Второе, наоборот, даёт выражение $x$ в функции $y$. В общем все три уравнения выражают одну и ту же зависимость между переменными $x$ и $y$, но только форма выражения этой зависимости разная: первое уравнение не решено ни относительно $x$, ни относительно $y$; в следующем за функцию принято $y$, за аргумент $x$, в последнем за функцию принято $x$, за аргумент $y$.

Такие две функции, которые выражают одну и ту же зависимость между переменными $x$ и $y$, но в одной за функцию принято $y$, а в другой за функцию принято $x$, называются взаимно обратными. Любую из них можно принять за прямую; тогда другая будет обратная.

Примеры взаимно обратных функций:

$$y = 5x + 3; \quad x = \frac{y-3}{5};$$

$$y = 2x; \quad x = \frac{1}{2}y;$$

$$y = x^2; \quad x = \pm\sqrt{y};$$

$$y = \sqrt[3]{x}; \quad x = y^3.$$

Понятие обратности можно применить и к тригонометрическим функциям.

Например, мы употребляем равенство: $y = \sin x$; это значит, что $y$ есть синус дуги $x$. Очевидно, обратно, $x$ есть

дуга, синус которой равен $y$. Точно так же: $\frac{1}{2} = \sin 30°$, т. е. половина есть синус дуги в 30°. Наоборот, 30° есть дуга, синус которой равен половине.

Вместо того чтобы объяснить обратную зависимость словами, употребляют особый знак, обозначающий слово „дуга": arc [читается „арк"; сокращённое латинское слово arcus (дуга)].

Таким образом, можно написать:

$$\frac{1}{2} = \sin 30°; \quad 30° = \operatorname{arc}\sin\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2} = \cos 60°; \quad 60° = \operatorname{arc}\cos\frac{1}{2};$$

$$1 = \operatorname{tg} 45°; \quad 45° = \operatorname{arc}\operatorname{tg} 1;$$

$$\sin 16° = 0{,}276; \quad 16° = \operatorname{arc}\sin 0{,}276;$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = 0{,}707; \quad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc}\cos 0{,}707;$$

$$1 = \sin 90°; \quad 90° = \operatorname{arc}\sin 1;$$

$$1 = \cos 0°; \quad 0° = \operatorname{arc}\cos 1;$$

$$-1 = \cos\pi; \quad \pi = \operatorname{arc}\cos(-1);$$

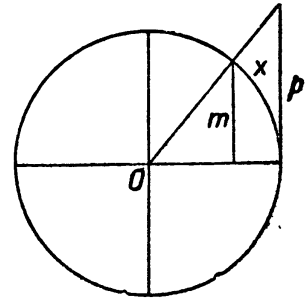
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty; \quad \frac{\pi}{2} = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\infty;$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc}\sin\frac{1}{2}\sqrt{2} = \operatorname{arc}\cos\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

На чертеже 37 (радиус равен единице) мера дуги обозначена через $x$, её синус через $m$, её тангенс через $p$. Значит, $x$ есть дуга, синус которой $m$, а тангенс $p$; или:

$$x = \operatorname{arc}\sin m; \quad x = \operatorname{arc}\operatorname{tg} p.$$



Черт. 37.

Пользуясь тригонометрическими таблицами, мы решаем две задачи: 1) если дана дуга (или угол), то мы отыскиваем тригонометрическую функцию; 2) если дана тригонометрическая функция, то мы отыскиваем величину дуги (угла). Последнее есть не что иное, как нахождение значения обратной тригонометрической функции по значению её аргумента.

Из § 47 мы знаем, что одной и той же тригонометрической функции соответствует бесчисленное множество дуг, имеющих одно и то же начало. Например, синусу, равному $\frac{1}{2}$, соответствуют дуги в 30°, 150°, 390°, 510°,...; основные из них, дуги в 30° и 150°, имеют синус, равный половине, но если прибавить к каждой по 360°, то и новые дуги будут иметь тот же синус. Следовательно, обратные тригонометрические функции — функции многозначные.

**§ 49.** В предыдущих примерах мы ограничивались наименьшей дугой, соответствующей данной тригонометрической функции, но можно было дать и общее выражение всех дуг, имеющих данный синус, косинус, тангенс. Если имеют в виду не наименьшее, а общее выражение всех дуг, имеющих данный синус, то обозначение дуги пишут с большой буквы; например:

$$\arcsin\frac{1}{2}=30°;\ \text{но}\ \operatorname{Arc}\sin\frac{1}{2}=180°\cdot m+(-1)^m\cdot 30°,$$

или: $\operatorname{arc\,tg}\,1=45°$; но $\operatorname{Arc\,tg}\,1=45°+180°\cdot m$.

Эти формулы взяты из § 47 (общий вид углов, соответствующих данному значению тригонометрической функции), но там ещё не употреблялись обозначения обратных тригонометрических функций.

Если воспользоваться формулами § 47 и обобщить их, заменив числовые значения буквенными, то получим следующую таблицу прямых и обратных тригонометрических функций:

| | |
|---|---|
| $y=\sin x;$ | $\operatorname{Arc}\sin y=m\pi+(-1)^m\cdot x;$ |
| $y=\cos x;$ | $\operatorname{Arc}\cos y=2m\pi\pm x;$ |
| $y=\operatorname{tg} x;$ | $\operatorname{Arc\,tg}\,y=m\pi+x;$ |
| $y=\operatorname{ctg} x;$ | $\operatorname{Arc\,ctg}\,y=m\pi+x.$ |

Большей частью, однако, по данной тригонометрической функции отыскивают наименьшую по абсолютной величине дугу (arc). При этом для положительных значений всех тригонометрических функций берут дугу в I четверти $\left(\text{от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$; для отрицательных значений синуса, тангенса и косеканса берут дугу в I отрицательной четверти $\left(\text{от } 0 \text{ до } -\frac{\pi}{2}\right)$; для отрицательных значений косинуса, котангенса и секанса берут дугу во II четверти $\left(\text{от } \frac{\pi}{2} \text{ до } \pi\right)$.

Таким образом, для всех возможных значений синуса,

тангенса и косеканса дугу берут в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, а для косинуса, котангенса и секанса в пределах от 0 до $\pi$.

Обратные тригонометрические функции называются также обратными круговыми вследствие их связи с кругом.

## IV. Выражение синуса, косинуса и тангенса суммы и разности углов, двойного угла и половины угла.

### § 50. Синус и косинус суммы и разности двух углов.

Пусть $\alpha$ и $\beta$ — положительные острые углы, составляющие в сумме менее 90°.

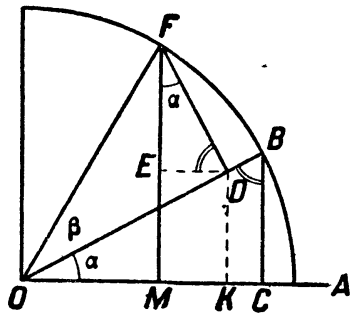
Отложим в тригонометрическом круге угол $\alpha+\beta$ (черт. 38).

Построим линии синусов углов $\alpha$, $\beta$ и $\alpha+\beta$. Из чертежа видим, что:

$$\sin\alpha=\frac{BC}{R};\ \cos\alpha=\frac{OC}{R};\ \sin\beta=\frac{FD}{R};\ \cos\beta=\frac{OD}{R};$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{FM}{R};\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{OM}{R}.$$

§ 51. а) *Синус суммы.* Чтобы выразить $\sin(\alpha+\beta)$ через функции углов $\alpha$ и $\beta$, построим треугольники, связывающие тригонометрические линии этих углов. Для этого проведём $DE \parallel OA$ и $DK \parallel BC$.



Черт. 38.

Из чертежа получаем, что

$$FM=ME+EF=KD+EF.$$

Чтобы вычислить $KD$, рассмотрим прямоугольные треугольники $ODK$ и $OBC$; они подобны, так как имеют общий острый угол $\alpha$. Выразим пропорциональность сторон:

$$\frac{DK}{BC}=\frac{OD}{OB};\ DK=BC\cdot\frac{OD}{OB}=ME.$$

Отрезок $EF$ вычислим из прямоугольных треугольников $FED$ и $OBC$, которые подобны вследствие перпендикулярности сторон; получим:

$$\frac{EF}{OC}=\frac{FD}{OB};\ EF=OC\cdot\frac{FD}{OB}.$$

Складывая результаты и заметив, что $OB = OF$, получим:

$$FM = ME + EF = BC \cdot \frac{OD}{OF} + OC \cdot \frac{FD}{OB}.$$

Разделим обе части равенства на радиус, чтобы получить отношение отрезков и перейти к тригонометрическим функциям:

$$\frac{FM}{R} = \frac{BC}{R} \cdot \frac{OD}{OF} + \frac{OC}{R} \cdot \frac{FD}{OB};$$

переходя к тригонометрическим функциям, получим:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

б) *Косинус суммы.* Чтобы выразить косинус суммы двух углов через функции этих углов, обратимся опять к чертежу 38. Из чертежа видим, что

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OM}{OF}.$$

Но

$$OM = OK - MK = OK - ED;$$

следовательно:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OK}{OF} - \frac{ED}{OF}.$$

Разделив и умножив в правой части последнего равенства первый член на $OD$, а второй член на $FD$, получим:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OK}{OD} \cdot \frac{OD}{OF} - \frac{ED}{FD} \cdot \frac{FD}{OF}.$$

Из треугольника $ODK$: $\frac{OK}{OD} = \cos\alpha$;

из треугольника $EFD$: $\frac{ED}{FD} = \sin\alpha$;

из треугольника $OFD$: $\frac{OD}{OF} = \cos\beta$;

из треугольника $OFD$: $\frac{FD}{OF} = \sin\beta$.

Следовательно:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

§ 52. а) *Синус разности.* Формулы для синуса разности можно вывести из формул для синуса и косинуса суммы двух углов, опираясь при этом на формулы приведения.

Имеем:

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos[90^\circ-(\alpha-\beta)]=\cos[(90^\circ-\alpha)+\beta]=$$
$$=\cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta-\sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta=$$
$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

б) *Косинус разности.* Аналогично предыдущему для косинуса разности двух углов имеем:

$$\cos(\alpha-\beta)=\sin[90^\circ-(\alpha-\beta)]=\sin[(90^\circ-\alpha)+\beta]=$$
$$=\sin(90^\circ-\alpha)\cos\beta+\cos(90^\circ-\alpha)\sin\beta=$$
$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

**§ 53.** Итак, мы получили следующие четыре формулы:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta; \quad (I)$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta; \quad (II)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta; \quad (III)$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta. \quad (IV)$$

При выводе этих формул мы предполагали, что $\alpha>\beta$ и что $\alpha+\beta<90^\circ$; в следующем параграфе будет доказано, что полученные формулы обладают общностью, т. е. что они справедливы и для каких угодно значений $\alpha$ и $\beta$.

**§ 54. Доказательство общности формул § 53.** Рассмотрим сначала формулы для суммы, а из них уже легко будет получить формулы для разности. При выводе мы будем пользоваться, между прочим, и формулами приведения, общность которых уже доказана (§ 38). Переходим к самому доказательству.

I. а) Оба слагаемых угла положительны.

1) Для $\alpha+\beta<90^\circ$ формулы доказаны.

2) Пусть $\alpha<90^\circ$ и $\beta<90^\circ$; но $\alpha+\beta>90^\circ$; тогда, полагая $\alpha=90^\circ-\alpha_1$ и $\beta=90^\circ-\beta_1$, будем иметь:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin[180^\circ-(\alpha_1+\beta_1)]=\sin(\alpha_1+\beta_1);$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[180^\circ-(\alpha_1+\beta_1)]=-\cos(\alpha_1+\beta_1).$$

Так как $\alpha_1+\beta_1<90^\circ$, то, применяя к этой сумме доказанные формулы и пользуясь свойством дополнительных углов, получим: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha_1\cdot\cos\beta_1+\cos\alpha_1\cdot\sin\beta_1=\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta$;

$$\cos(\alpha+\beta)=-\cos\alpha_1\cdot\cos\beta_1+\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1=-\sin\alpha\cdot\sin\beta+$$
$$+\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

Получилось то же самое, что и в § 53.

Из пп. 1) и 2) вместе следует, что формулы (I) и (II) верны для всех положительных острых углов.

3) Докажем теперь, что если формулы (I) и (II) справедливы для каких-нибудь двух углов, то они останутся справедливыми и тогда, когда к одному из этих углов прибавим 90°.

Обозначим через $\alpha$ и $\beta$ два таких угла, для которых формулы верны, и положим, что $\alpha + 90° = \alpha_1$, тогда:

$$\sin(\alpha_1 + \beta) = \sin[90° + (\alpha + \beta)] = \cos(\alpha + \beta);$$
$$\cos(\alpha_1 + \beta) = \cos[90° + (\alpha + \beta)] = -\sin(\alpha + \beta).$$

Разлагая здесь $\cos(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha + \beta)$ на основании допущения, сделанного относительно $\alpha$ и $\beta$, получим:

$$\sin(\alpha_1 + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta; \quad (1)$$
$$\cos(\alpha_1 + \beta) = -(\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta). \quad (2)$$

В правых частях равенства перейдём от $\alpha$ к $\alpha_1$. Так как $\alpha + 90° = \alpha_1$, то $\alpha = \alpha_1 - 90°$, или $\alpha = -(90° - \alpha_1)$, а отсюда:

$$\sin\alpha = -(\sin 90° - \alpha_1) = -\cos\alpha_1.$$
$$\cos\alpha = \cos(90° - \alpha_1) = \sin\alpha_1.$$

Заменяя теперь в равенствах (1) и (2) $\sin\alpha$ через $-\cos\alpha_1$ и $\cos\alpha$ через $\sin\alpha_1$, получим:

$$\sin(\alpha_1 + \beta) = \sin\alpha_1 \cdot \cos\beta - (-\cos\alpha_1) \cdot \sin\beta = \sin\alpha_1 \cdot \cos\beta + \cos\alpha_1 \cdot \sin\beta;$$
$$\cos(\alpha_1 + \beta) = -[(-\cos\alpha_1) \cdot \cos\beta + \sin\alpha_1 \cdot \sin\beta] = \cos\alpha_1 \cdot \cos\beta - \sin\alpha_1 \cdot \sin\beta.$$

Мы получили формулы (I) и (II) предыдущего параграфа для углов $\alpha_1 = \alpha + 90°$ и $\beta$.

4) Каждый положительный угол, превышающий 90°, можно получить через последовательное присоединение 90° к острому углу; формулы (I) и (II) для острых углов уже доказаны, а присоединение 90° к тому или другому углу не нарушает соотношения, как мы только что видели, поэтому формулы будут верны для положительных углов любой величины.

I. б) Один из слагаемых углов или оба отрицательны. Отрицательный угол может быть получен через последовательное присоединение $-360°$ к положительному углу. Для положительных углов формулы (I) и (II) доказаны; присоединение $-360°$ к $\alpha$ или $\beta$ или к тому и другому не изменяет ни синуса и косинуса суммы, ни синусов и косинусов отдельных углов, поэтому формулы будут верны и тогда, если один из углов или оба будут отрицательны.

Из пп. I а) и I б) следует, что формулы (I) и (II) верны при любом значении $\alpha$ и $\beta$.

II. Случай разности двух углов.

Заменяя в формулах суммы $\beta$ через $-\beta$, найдём:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

Эти формулы доказаны теперь для углов $\alpha$ и $\beta$ любой величины. Итак, общность формул (I)—(IV) доказана.

**§ 55. Тангенс суммы и разности двух углов.** 1) Имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Чтобы перейти к $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, разделим числитель и знаменатель второй дроби почленно на $\cos\alpha\cdot\cos\beta$; получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \qquad (V)$$

2) Повторяя тот же самый приём, найдём:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \qquad (VI)$$

**§ 56.** От суммы и разности двух углов можно перейти к сумме какого угодно числа положительных и отрицательных углов; например:

$$\sin(\alpha-\beta+\gamma)=\sin[(\alpha-\beta)+\gamma]=$$
$$=\sin(\alpha-\beta)\cdot\cos\gamma+\cos(\alpha-\beta)\cdot\sin\gamma;$$

далее применяем формулы (III) и (IV).

**§ 57. Синус, косинус и тангенс двойного угла.** В формулах для суммы двух углов полагаем $\beta=\alpha$; получим:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha; \qquad (VII)$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha; \qquad (VIII)$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (IX)$$

**§ 58.** Чтобы разложить тригонометрические функции углов $3\alpha$ и $4\alpha$, представляем эти углы в виде $2\alpha+\alpha$ и $2\cdot(2\alpha)$. Например:

1) $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha=$
$=(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)\cdot\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha=$
$=\sin\alpha(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$

2) $\sin 4\alpha=\sin 2\cdot(2\alpha)=2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=$
$=4\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha).$

**§ 59.** Нередко бывает необходимо функции данного угла выразить посредством функций его половины; для этого рассматриваем данный угол как удвоенную его половину и применяем § 57.

Например:

a) $\sin\alpha = \sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$;

b) $\cos\alpha = \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

**§ 60. Синус, косинус и тангенс половины угла.** По § 12 и 59 имеем следующие равенства:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1; \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

Складывая и вычитая их, найдём:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha \text{ и } 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha,$$

а отсюда:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (X)$$

и

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad (XI)$$

Разделив равенство (X) на (XI), получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (XII)$$

В следующем параграфе будет дана более удобная формула.

Применяя полученные формулы, следует сохранять перед корнем оба знака только тогда, когда нет данных для выбора между ними; в противном случае берём один требуемый знак.

**Пример.** Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\alpha$ содержится между 270° и 360° и $\cos\alpha = 0{,}6$. Так как $270° < \alpha < 360°$, то $135° < \frac{\alpha}{2} < 180°$;

таким образом, угол $\frac{\alpha}{2}$ — тупой, и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ имеет отрицательное значение. Поэтому мы должны взять

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-0{,}6}{1+0{,}6}}=-\frac{1}{2}.$$

**§ 61. О двойных знаках в формулах (X) и (XI).** Если дано значение $\cos\alpha$ и значения $\alpha$ ничем другим не ограничены, то определение функций дуг $\frac{\alpha}{2}$ равносильно их определению для **всех** значений $\alpha$, соответствующих данному значению косинуса. Пусть будет из них $\varphi$ наименьшее положительное; тогда $\alpha=\pm\varphi+360°\cdot n$, а следовательно, $\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\varphi}{2}+180°\cdot n$. Концы дуг $+\frac{\varphi}{2}$ и $-\frac{\varphi}{2}$ находятся в I и IV четвертях; присоединяя $180°\cdot n$, мы получим при $n$ чётном те же самые концы дуг (т. е. в I и IV четвертях), а при $n$ нечётном — диаметрально противоположные им (т. е. в III и II четвертях). Таким образом, концы дуг $\frac{\alpha}{2}$ распределятся по всем четырём четвертям, а потому значения функций дуг $\frac{\alpha}{2}$ будут как положительными, так и отрицательными.

**§ 62.** Выразим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ещё через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Для этого заменим $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ и дополним сначала числитель, а потом знаменатель до $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$; получим (по § 59 и 60):

a) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}};\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

b) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}};\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

**Пример.** Применим формулы a) и b) к примеру из § 60. Имеем: $270°<\alpha<360°$ и $\cos\alpha=0{,}6$; отсюда:

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-(0{,}6)^2}=-0{,}8.$$

Таким образом:

a) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-0{,}8}{1+0{,}6}=\frac{-0{,}8}{1{,}6}=-\frac{1}{2}$;

b) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-0{,}6}{-0{,}8}=\frac{0{,}4}{-0{,}8}=-\frac{1}{2}$.

## V. Приведение выражений к виду, удобному для логарифмирования.

**§ 63. Общее замечание.** Чтобы значение выражения удобно было вычислить с помощью логарифмов, это выражение не должно содержать ни сумм, ни разностей, кроме таких, которые легко найти непосредственно.

Если это условие не выполнено, то следует данное выражение преобразовать, насколько это возможно и выгодно. Главные из таких преобразований мы и рассмотрим теперь.

**§ 64. Преобразование суммы и разности двух синусов или косинусов.**

Преобразуем $\sin\alpha+\sin\beta$. Для этого положим

$$\alpha=x+y \tag{1}$$

и

$$\beta=x-y \tag{2}$$

и применим формулы (I) и (III) § 53; будем иметь:

$$\sin\alpha=\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y; \tag{3}$$

$$\sin\beta=\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y; \tag{4}$$

отсюда:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin x\cdot\cos y;$$

но из уравнений (1) и (2) следует:

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}\quad\text{и}\quad y=\frac{\alpha-\beta}{2};$$

таким образом,

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{XIII}$$

Вычитая почленно равенство (4) из (3), получим:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos x\cdot\sin y=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

или

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad \text{(XIV)}$$

Воспользуемся теперь формулами

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y, \qquad (5)$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y, \qquad (6)$$

считая опять

$$\alpha = x+y \text{ и } \beta = x-y.$$

Сложив почленно равенства (5) и (6), получим:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y \qquad \text{(XV)}$$

или

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Вычтя почленно равенство (6) из (5), получим:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}. \qquad \text{(XVI)}$$

**Примеры.**

1) $\sin 100° - \sin 16° = 2\cos\frac{100°+16°}{2}\cdot\sin\frac{100°-16°}{2} =$
$= 2\cos 58°\cdot\sin 42°.$

2) $\cos 12° - \cos 60° = 2\sin 36°\cdot\sin 24°.$

3) $\cos 50° + \sin 70° = \cos 50° + \cos 20° = 2\cos 35°\cdot\cos 15°.$

4) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin(90° - \alpha) = 2\sin 45°\times$
$\times\cos(\alpha - 45°) = \sqrt{2}\cdot\cos(\alpha - 45°).$

**§ 65.** Преобразуем ещё следующие выражения, содержащие синус и косинус.

---

[1]) $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\left(-\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = -\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$. Формула (XVI) читается так: *разность двух косинусов равна удвоенному произведению синуса полусуммы углов на синус обратной полуразности их.*

а) Деля равенство (XIII) на (XIV), получим:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}:\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}};$$

следовательно,

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}. \qquad \text{(XVII)}$$

б) По § 60 имеем:

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad \text{(XVIII)}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad \text{(XIX)}$$

**Примеры.**

1) $\dfrac{\sin 35^\circ+\sin 14^\circ}{\sin 35^\circ-\sin 14^\circ}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{35^\circ+14^\circ}{2}}{\operatorname{tg}\frac{35^\circ-14^\circ}{2}}=\dfrac{\operatorname{tg}24^\circ30'}{\operatorname{tg}10^\circ30'}.$

2) $1+\cos 10^\circ23'=2\cos^2 5^\circ11'30''.$

3) $1-\sin 40^\circ=1-\cos 50^\circ=2\sin^2 25^\circ.$

**§ 66. Преобразование суммы и разности двух тангенсов или котангенсов.** Чтобы преобразовать выражения: $\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta$, надо сначала перейти к синусу и косинусу, например:

а) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$

б) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta};$

в) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}=-\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}.$

**§ 67. Введение вспомогательного угла.** Приводя выражение к удобному для логарифмирования виду, иногда бывает выгодно некоторые числа рассматривать как значе-

ния тригонометрических функций углов. Вот несколько таких случаев:

1) $\sqrt{\sqrt{5}-1}=\sqrt{4\sin 18^\circ}=2\sqrt{\sin 18^\circ}$.

2) $1+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\alpha}$.

3) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cdot\left(\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$
$=\sqrt{2}\cdot(\sin\alpha\cdot\cos 45^\circ+\cos\alpha\cdot\sin 45^\circ)=\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha+45^\circ)$.

4) $1+2\sin 50^\circ=2\cdot\left(\frac{1}{2}+\sin 50^\circ\right)=$
$=2\cdot(\sin 30^\circ+\sin 50^\circ)=4\sin 40^\circ\cdot\cos 10^\circ$.

**§ 68.** В § 67 преобразование удавалось с помощью некоторых простейших углов. Рассмотрим теперь общий случай, а именно: введём вспомогательный угол для $A+B$ и $A-B$, обозначая через $A$ и $B$ какие угодно выражения:

1) Имеем $A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)$; здесь принимаем $\frac{B}{A}$ за тангенс некоторого угла, что возможно, так как значением тангенса может быть любое число. Полагая $\frac{B}{A}=\operatorname{tg}\varphi$, получим: $A+B=A(1+\operatorname{tg}\varphi)$; но по § 67 $1+\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin(45^\circ+\varphi)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\varphi}$; таким образом:

$$A+B=A\cdot\frac{\sin(45^\circ+\varphi)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\varphi}.$$

Для вычисления второй части надо, конечно, сначала найти вспомогательный угол $\varphi$ (с помощью таблиц).

2) Тем же самым способом получим:

$$A-B=A\cdot\frac{\sin(45^\circ-\varphi)}{\cos 45^\circ\cdot\cos\varphi}.$$

3) Еще получим:

$$\frac{A+B}{A-B}=\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}=\operatorname{tg}(45^\circ+\varphi).$$

**§ 69.** Выражения $A+B$ и $A-B$ преобразуются проще, чем в § 68, если известно, что $A$ и $B$ имеют положительные значения.

1) Имеем $A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)$; так как $\frac{B}{A}$ положительно, то принимаем $\frac{B}{A}=\operatorname{tg}^2\varphi$; тогда:

$$A+B=A(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=A\sec^2\varphi=\frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

2) Для разности $A-B$, если $A>B$, возьмём $A-B=A\left(1-\frac{B}{A}\right)$ и положим $\frac{B}{A}$ $\sin^2\varphi$; это возможно, так как $\frac{B}{A}$ положительно и менее единицы. Тогда:

$$A-B=A(1-\sin^2\varphi)=A\cdot\cos^2\varphi.$$

Если $A<B$, то берём сначала $A-B=-(B-A)$, после чего $B-A$ преобразуем, как раньше.

## VI. О тригонометрических уравнениях.

**§ 70. Общие замечания.** Уравнение называется тригонометрическим, если содержит неизвестное под знаком тригонометрической функции; таковы, например, уравнения:

$2\sin^2x+3\cos x=0$; $\sin 5x=\sin 4x$; $\operatorname{tg}(\alpha+x)=m\operatorname{tg}x$ (в первом уравнении неизвестное служит аргументом, во втором — входит в состав аргумента, в третьем — то и другое).

От тригонометрических уравнений следует отличать тригонометрические тождества: так называются те равенства, которые справедливы при всех значениях аргумента. Например, в равенстве $\sin^2x+\cos^2x=1$ правая часть всегда равна левой, — оно есть тождество; равенство $\sin^2x-\cos^2x=1$ верно только для некоторых значений аргумента [1]), — оно есть уравнение.

Решить тригонометрическое уравнение — значит определить те углы, которые удовлетворяют ему, т. е. делают обе его части равными (эти углы называются корнями уравнения). Для решения надо сначала определить какую-нибудь функцию неизвестного угла, а по ней определить аргумент (обыкновенно с помощью таблиц). Но из § 47 мы знаем, что данному значению функции соответ-

[1]) Например при $x=45^\circ$ левая часть не равна правой.

ствует бесконечный ряд углов; таким образом, тригонометрическое уравнение (если оно разрешимо) имеет бесконечное число корней; обыкновенно находят их общий вид. Пусть, например, решая какое-нибудь тригонометрическое уравнение, мы получили $\operatorname{tg} 3x = 1$. Этому значению тангенса соответствует аргумент такого состава: $45° + 180° \cdot n$, где $n$ — произвольное целое число. Следовательно, $3x = 45° + 180° \cdot n$, откуда определяем $x$; деля обе части равенства на 3, получим: $x = 15° + 60° \cdot n$. Это и будет общий вид корней данного уравнения. (Примером неразрешимого уравнения может служить $5 \sin x = 7$; из него $\sin x = \frac{7}{5}$, а это невозможно, так как абсолютная величина синуса должна быть не более единицы.)

Что касается самих приёмов решения, то большей частью выгодно приводить уравнение к одной функции, преимущественно к синусу или косинусу, и к одному аргументу; тогда, приняв эту функцию за особое неизвестное, решаем уравнение как алгебраическое и отбрасываем те корни его, которые не могут служить значением определяемой функции. Иногда бывает также выгодно приводить вопрос к обращению в нуль произведения или дроби. Всё сказанное поясним на примерах.

**§ 71. Примеры.** I. Решить уравнение: $2 \sin^2 x = 3 \sin x$.

Решение. Приведя уравнение к виду $\sin x \cdot (2 \sin x - 3) = 0$, получим:

$$\sin x = 0; \quad 2 \sin x - 3 = 0, \text{ откуда } \sin x = \frac{3}{2}.$$

Второе значение $\sin x$ невозможно (так как превышает единицу), а первому значению соответствует $x = 180° \cdot n$ (или $x = \pi n$).

II. Решить уравнение: $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$.

Решение. Заменяя $\sin^2 x$ через $1 - \cos^2 x$, получим:

$$2 \cdot (1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0$$

и затем:

$$\cos^2 x - \frac{3}{2} \cos x - 1 = 0,$$

откуда:

$$\cos x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1}; \quad \cos x_1 = 2 \text{ и } \cos x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Первое значение для $\cos x$ невозможно, а взяв $\cos x = -\frac{1}{2}$, получим:

$$x = 360° \cdot n \pm 120° \left(\text{или } x = 2\pi n \pm \frac{2\pi}{3}\right)$$

III. Решить уравнение: $\operatorname{ctg}(270° - x) = 3 \operatorname{ctg} x$.

Решение. Заменяя $\operatorname{ctg}(270° - x)$ и $\operatorname{ctg} x$ соответственно через $\operatorname{tg} x$ и $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, будем иметь $\operatorname{tg} x = \frac{3}{\operatorname{tg} x}$, откуда $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3}$. Оба полученные значения для $\operatorname{tg} x$ пригодны: если $\operatorname{tg} x_1 = +\sqrt{3}$, то $x_1 = 60° + 180° \cdot n$; если $\operatorname{tg} x_2 = -\sqrt{3}$, то $x_2 = -60° + 180°\ n$. Таким образом, вообще:

$$x = 180° \cdot n \pm 60°, \text{ или } x = \pi n \pm \frac{\pi}{3}.$$

IV. Решить уравнение: $\operatorname{tg}(\alpha + x) = m \cdot \operatorname{tg} x$, где $\alpha$ и $m$ предполагаются известными.

Решение. Разложив $\operatorname{tg}(\alpha + x)$, находим последовательно:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} x} = m \cdot \operatorname{tg} x;\ \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} x =$$
$$= m\ \operatorname{tg} x - m \cdot \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}^2 x;$$
$$m \cdot \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}^2 x - (m-1) \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\alpha = 0;$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{m - 1 \pm \sqrt{(m-1)^2 - 4m\ \operatorname{tg}^2\alpha}}{2m \cdot \operatorname{tg}\alpha}.$$

V. Решить уравнение: $\sin x - \cos x = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Решение. Здесь выгодно заменить левую часть произведением (ср. в § 64 пример 4):

$$\sin x - \sin\ (90° - x) = \sqrt{\frac{1}{2}};$$
$$2 \cos 45° \cdot \sin(x - 45°) = \sqrt{\frac{1}{2}};$$
$$\sqrt{2} \sin(x - 45°) = \sqrt{\frac{1}{2}};\ \sin(x - 45°) = \frac{1}{2}.$$

Отсюда:

$$x - 45° = 30° + 360° \cdot n \text{ и } x - 45° = 150° + 360° \cdot n,$$

а следовательно, $x = 75° + 360° \cdot n$ и $x = 195° + 360° \cdot n$, или

$$x = \frac{5}{12}\pi + 2\pi \cdot n \text{ и } x = \frac{13}{12}\pi + 2\pi \cdot n.$$

VI. Решить уравнение: $\sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = 3 \cos^2 x$.

Решение. Разделив обе части на $\cos^2 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 3,$$

откуда для $\operatorname{tg} x$ получим два значения: $-1$ и 3; соответственно этим значениям $\operatorname{tg} x$ найдём: $x_1 = 135° + 180° \cdot n$, или $x_1 = -45° + 180° \cdot n$ и $x_2 = 71°33'54'' + 180° \cdot n$.

VII. Решить уравнение: $\sin 5x = \sin 4x$.

Решение. $\sin 5x - \sin 4x = 0$; $2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{9x}{2} = 0$.

Далее: $\sin \frac{x}{2} = 0$, откуда $\frac{x}{2} = 180° \cdot n$ и, следовательно, $x = 360° \cdot n$; $\cos \frac{9x}{2} = 0$, откуда $\frac{9x}{2} = 90° + 180° \cdot n$ и, следовательно:

$$x = 20° + 40° \cdot n.$$

Итак,

$$x = 360° \cdot n; \quad x = 20° + 40° \cdot n.$$

VIII. Решить уравнение: $a \cdot \sin x = b \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$.

Решение.

$$a \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = b \cdot \cos^2 \frac{x}{2};$$

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \left(2a \cdot \sin \frac{x}{2} - b \cdot \cos \frac{x}{2}\right) = 0,$$

отсюда:

1) $\cos \frac{x}{2} = 0$; 2) $2a \cdot \sin \frac{x}{2} - b \cdot \cos \frac{x}{2} = 0$, откуда $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{b}{2a}$.

IX. Решить уравнение: $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 2x$.

Решение. Приведя уравнение к виду $\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 2x = 0$ и применяя § 67, получим: $\frac{\sin(5x-2x)}{\cos 5x \cdot \cos 2x} = 0$; это даёт $\sin 3x = 0$, откуда $3x = 180° \cdot n$ и, следовательно, $x = 60° \cdot n$.

X. Решить уравнение: $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$.

Решение. *1-й способ.* Так как $\sin x$ и $\cos x$ выражаются друг через друга иррационально, то, сначала уединив $a \cdot \sin x$ (или $b \cos x$), возводим обе части в квадрат и тогда заменяем уже $\sin^2 x$ (или $\cos^2 x$).

*2-й способ.* Воспользуемся тем, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выражаются рационально через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а именно:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \text{ и } \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\ ^{1}).$$

Если сделать такую замену в нашем уравнении, то получим уравнение квадратное относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, из которого и найдём:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}.$$

Отсюда, между прочим, видно, что условие возможности решения задачи есть: $a^2 + b^2 \geqslant c^2$.

Если для функции искомого угла получается выражение буквенное, как, например, в данном случае, то оно и считается окончательным ответом; необходимо только исследовать, при каких значениях входящих в ответ букв полученное для тригонометрической функции значение возможно.

*3-й способ.* При многозначных числах предыдущий способ затруднителен, и тогда решают данное уравнение посредством вспомогательного угла следующим обра-

---

[1]) Взяв $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, делим правые части на $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ (что равно 1), а затем числитель и знаменатель делим на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

зом: разделив обе части уравнения на $b$ и полагая $\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\varphi$, будем иметь:

$$\operatorname{tg}\varphi\cdot\sin x+\cos x=\frac{c}{b};$$

умножая теперь обе части на $\cos\varphi$, получим:

$$\cos(x-\varphi)=\frac{c}{b}\cdot\cos\varphi.$$

Отсюда находим сначала $x-\varphi$, а затем $x$.

**§ 72.** Примеры этого параграфа будут касаться вопроса о потере корней в уравнении и о получении посторонних корней, причём предполагается, что общая теория этого вопроса уже известна учащемуся из алгебры.

I. Когда приравнивается нулю один из множителей произведения с целью обратить в нуль самое произведение, то необходимо следить, не обращается ли при этом другой множитель в $\infty$

Возьмём, например, уравнение $\sin x\cdot\operatorname{ctg}2x=0$. Приравнивая нулю отдельные множители, получим:

1) $\sin x=0$, $x=180^\circ\cdot n$; 2) $\operatorname{ctg}2x=0$, $2x=90^\circ+180^\circ\cdot n$, и, следовательно, $x=45^\circ+90^\circ\cdot n$.

Сделаем теперь проверку.

Подставляя в данное уравнение корень $x=180^\circ\cdot n$, получим в первой части: $\sin(180^\circ\cdot n)\cdot\operatorname{ctg}(360^\circ\cdot n)$, что равно $0\cdot\infty$.

Чтобы раскрыть эту неопределённость, преобразуем произведение $\sin x\cdot\operatorname{ctg}2x$; при всяком $x$ имеем:

$$\sin x\cdot\operatorname{ctg}2x=\sin x\cdot\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{\cos 2x}{2\cos x};$$

подставляя сюда $x=180^\circ\ n$, получим:

$$\frac{\cos(360^\circ\cdot n)}{2\cos(180^\circ\cdot n)}=\frac{1}{2\cdot(-1)^n}=\frac{1}{2}\cdot(-1)^n.$$

Таким образом, корень $x=180^\circ\cdot n$ не удовлетворяет данному уравнению, так как обращает левую часть его не в нуль, а в $+\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$.

Подставляем в данное уравнение корень $x=45^\circ+90^\circ\cdot n$. Так как $\sin x$ никогда не обращается в $\infty$, то в произведении получим нуль, и, следовательно, испытуемый корень пригоден.

Итак, после исследования остаётся только $x=45^\circ+90^\circ\cdot n$.

II. Решить уравнение: $\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{\cos 2x}{\cos x}$.

Решение. Освобождаясь от знаменателей, получим $\sin 2x\times\cos x=\cos 2x\cdot\sin x$, или $\sin 2x\ \cos x-\cos 2x\cdot\sin x=0$; здесь в левой части мы имеем разложенный синус разности; таким образом, получим $\sin x=0$, откуда $x=180^\circ\cdot n$. Так как при $\sin x=0$

общий знаменатель $\sin x \cdot \cos x$ обращается в нуль, то полученный корень сомнительный.

Подставив $x = 180° \cdot n$ в данное уравнение, будем иметь:

$$\frac{\sin(360° \cdot n)}{\sin(180° \cdot n)} = \frac{\cos(360° \cdot n)}{\cos(180° \cdot n)}, \text{ или } \frac{0}{0} = \frac{1}{(-1)^n}.$$

Чтобы раскрыть неопределённость в левой части, заметим, что $\frac{\sin 2x}{\sin x}$ тождественно равно $\frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sin x}$, или $2\cos x$; следовательно, истинное значение левой части есть $2\cos(180° \cdot n)$, или $2 \cdot (-1)^n$.

Таким образом, $x = 180° \cdot n$ не удовлетворяет данному уравнению.

Вообще, если в уравнении есть знаменатели, то более надёжный приём решения будет следующий: переносим все члены в одну часть и соединяем все члены в одну дробь; эту дробь сокращаем, если возможно, и затем определяем, какими способами можно обратить её в нуль.

Поступая так с данным уравнением, мы заменили бы его постепенно следующими:

$$\frac{\sin 2x \cdot \cos x - \cos 2x \cdot \sin x}{\sin x \cdot \cos x} = 0; \quad \frac{\sin(2x - x)}{\sin x \cdot \cos x} = 0; \quad \frac{1}{\cos x} = 0;$$
$$\sec x = 0.$$

Но секанс никогда не может быть нулём, и потому данное уравнение не имеет решений.

III. Если бы в примере I мы разделили обе части на $\sin x$, то потеряли бы корень $\sin x = 0$.

В примере VI, § 71, мы разделили обе части уравнения на $\cos^2 x$, но $\cos x = 0$ не удовлетворяет данному уравнению; следовательно, потери корней здесь не произошло.

IV. Решить уравнение: $\sin x + 7\cos x = 5$... (a).

Решение. Взяв $\sin x = 5 - 7\cos x$... (b), возвышаем здесь обе части в квадрат; получаем:

$$\sin^2 x = 25 - 70\cos x + 49\cos^2 x.$$

Далее найдём:

$$50\cos^2 x - 70\cos x + 24 = 0; \qquad \cos^2 x - \frac{7}{5}\cos x + \frac{12}{25} = 0;$$

$$\cos x = \frac{7}{10} \pm \sqrt{\frac{49}{100} - \frac{12}{25}} = \frac{7}{10} \pm \frac{1}{10}.$$

Таким образом:

1) $\cos x_1 = 0{,}8$, откуда $x_1 = 360° \cdot n \pm 36°52'12''$;
2) $\cos x_2 = 0{,}6$, откуда $x_2 = 360° \cdot n \pm 53°07'48''$.

Вспомним, что в нашем решении имеется возвышение обеих частей уравнения в квадрат, а от этого могли получиться посторонние корни. Такие корни будут, как известно, принадлежать уравнению, которое отличается от возведённого в квадрат только знаком одной части, т. е. уравнению $\sin x = -(5 - 7\cos x)$; следовательно, у них будет не тот знак синуса, какой требуется. Определим по-

этому, какой должен быть знак синуса, чтобы угол удовлетворял данному уравнению. Подстановка значений $\cos x$ в уравнение (b) даёт:

1) $\sin x_1 = 5 - 7 \cdot 0{,}8 < 0$; 2) $\sin x_2 = 5 - 7 \cdot 0{,}6 > 0$.

Таким образом, в полученном у нас решении должны быть исключены углы: $x_1 = 360° \cdot n + 36°52'12''$, как имеющие положительный синус, и $x_2 = 360° \cdot n - 53°07'48''$, как имеющие отрицательный синус.

Итак, окончательное решение уравнения (a) выразится формулами:

$$x_1 = 360 \cdot n - 36°52'12'' \quad \text{и} \quad x_2 = 360° \cdot n + 53°07'48''.$$

Решая для сравнения данное уравнение ещё переходом к $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, мы получим:

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{x}{2} = 26°33'54'' + 180° \cdot n$; $x = 53°07'48'' + 360° \cdot n$;

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{3}$; $\frac{x}{2} = -18°26'6'' + 180° \cdot n$; $x = -36°52'12'' + 360° \cdot n$.

# О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТАБЛИЦАХ.

## VII. Понятие о составлении тригонометрических таблиц.

**§ 73.** Покажем, как для всякого угла могут быть найдены приближённые значения его тригонометрических функций.

Тригонометрические функции любого угла приводятся, как мы знаем, к функциям положительного угла, не превышающего 45°; значения всех тригонометрических функций можно вычислить по значению одной из них, например синуса; из этого следует, что для нашей цели достаточно указать способ, каким можно было бы вычислить синус каждого из углов, содержащихся между 0° и 45°.

Один из способов основан на том, что при очень малом угле можно без значительной погрешности линию синуса заменить дугой.

Пусть, например, на чертеже 39 $\angle AOB = 10'$ (на чертеже величина угла искажена ввиду невозможности начертить столь малый угол). По определению синуса должно быть $\sin 10' = \frac{BC}{R}$, а указанный способ состоит в том,

что вместо $\frac{BC}{R}$ мы берём $\frac{\cup AB}{R}$. Для вычисления этого отношения мы имеем:

$$\cup AB = \frac{2\pi R \cdot 10}{360 \cdot 60} = \frac{\pi R}{1080},$$

откуда:

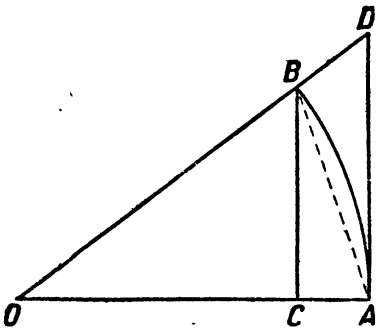
$$\frac{\cup AB}{R} = \frac{\pi}{1080};$$

подставляя сюда значения $\pi$, получим:

$$\frac{\cup AB}{R} = 0{,}002908882\ldots$$

Это число и послужит приближённым значением sin 10′.

Так как величина отношения $\frac{\cup AB}{R}$ есть радианная мера дуги, можно сказать, что синус очень малого угла мы заменяем радианной мерой соответствующей дуги.



Черт. 39.

По этому способу мы начнём вычисление с достаточно малой доли данного угла и будем увеличивать угол постепенно, применяя формулы, относящиеся к двойному углу и к сумме углов.

В § 74—76 будут доказаны три теоремы; из них вторая оправдывает замену синуса очень малой дуги этой дугой (измеренной в радианах), а третья позволяет судить о погрешности при такой замене.

***§ 74. Теорема.*** *Радианная мера дуги* $\left(\text{меньшей } \frac{\pi}{2}\right)$ *более синуса этой дуги и менее её тангенса.*

Пусть имеем: $0 < a < \frac{\pi}{2}$, где $a$ есть радианная мера угла; требуется доказать, что $\sin a < a < \operatorname{tg} a$.

Доказательство. По чертежу 39, проведя вспомогательную хорду $AB$, имеем:
площадь $\triangle OBA <$ площади сектора $OAB <$ площади $\triangle ODA$, или, взяв выражения этих площадей,

$$\frac{1}{2} OA \cdot BC < \frac{1}{2} OA \cdot \cup AB < \frac{1}{2} OA \cdot AD.$$

Отсюда:

$$BC < \cup AB < AD$$

и, деля каждую часть на $R$:

$$\frac{BC}{R} < \frac{\cup AB}{R} < \frac{AD}{R},$$

т. е.

$$\sin a < a < \operatorname{tg} a.$$

***§ 75. Теорема.*** *Если угол стремится к нулю, то отношение синуса к радианной мере угла имеет пределом единицу.*

Нам надо доказать, что $\lim\limits_{a \to 0} \frac{\sin a}{a} = 1$, где $a$ есть радианная мера угла.

Доказательство. По § 74 имеем:

$$\sin a < a < \operatorname{tg} a. \qquad (1)$$

Разделив $\sin a$ на каждую часть этого неравенства, получим:

$$1 > \frac{\sin a}{a} > \cos a. \qquad (2)$$

Если угол $a$ стремится к нулю, то $\cos a$ стремится к единице; таким образом, в неравенстве (2) третья и первая части неограниченно сближаются по величине, а следовательно, неограниченно сближается и вторая часть с первой, т. е. предел отношения $\frac{\sin a}{a}$ есть единица.

***§ 76. Теорема.*** *Для острого угла разность между радианной мерой и синусом менее четверти куба радианной меры.*

Пусть $a$ — радианная мера угла, причём $0 < a < \frac{\pi}{2}$; требуется доказать, что $a - \sin a < \frac{a^3}{4}$.

Доказательство. Начнём с неравенства $\frac{a}{2} < \operatorname{tg} \frac{a}{2}$ (применяя § 74 к дуге $\frac{a}{2}$). Умножив обе части на $2 \cos^2 \frac{a}{2}$, получим: $a \cdot \cos^2 \frac{a}{2} < 2 \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2}$, откуда: $a \left(1 - \sin^2 \frac{a}{2}\right) < \sin a$, а отсюда: $a - \sin a < a \cdot \sin^2 \frac{a}{2}$. Заменяя теперь

$\sin\frac{a}{2}$ большей величиной $\frac{a}{2}$ (§ 74), мы будем иметь окончательно: $a - \sin a < \frac{a^3}{4}$.

**§ 77.** Применяя способ указанный выше (с некоторыми упрощениями), можно составить так называемые таблицы натуральных тригонометрических величин, а взяв логарифмы найденных чисел, получим те логарифмические таблицы, которыми пользуются в тригонометрических вычислениях.

*Замечание.* В предыдущем доказана только возможность составления тригонометрических таблиц. Что же касается того, как они были составлены на самом деле в первый раз, то заметим лишь, что применённые тогда приёмы были весьма сложны.

## VIII. Тригонометрические таблицы.

**§ 78.** Дадим краткое объяснение таблиц тригонометрических функций, помещённых в книге В. Брадиса „Четырёхзначные математические таблицы", издания 1946 г.

Таблица IX содержит значения синуса и косинуса для всех острых углов, содержащих целое число градусов и минут. Для отыскания синуса надо найти слева данное число градусов, а сверху — данное число минут; на пересечении соответствующей строчки и столбца находится искомый синус.

**Примеры.** $\sin 20°12' = 0{,}3453$;
$\sin 75°48' = 0{,}9694$.

Обратно, при отыскании угла по синусу нужно найти данное значение синуса и слева взять градусы, а сверху — минуты:

$$\sin x = 0{,}8949; \quad x = 63°30'.$$

При отыскании косинуса надо градусы брать справа, а минуты — снизу, например:

$$\cos 35°42' = 0{,}8121.$$

Значения углов в этой таблице даны с интервалом в 6'. Для вычисления функций промежуточных углов надо пользоваться поправками на 1, 2 и 3 минуты в столбике справа. Например:

$$\sin 34°15' = 0{,}5628$$

(к $\sin 34°12'$ прибавлена поправка на 3', равная 7).

Так как в I четверти при увеличении угла синус растёт, а косинус убывает, то для синуса поправка прибавляется, а для косинуса — вычитается.

Таблица X содержит значения тангенсов для углов от 0° до 76° и котангенсов для углов от 14° до 90°. Пользоваться этой таблицей надо так же, как таблицей IX.

Таблица XI содержит значения тангенсов для углов от 76° до 90° и котангенсов для углов от 0° до 14°; в этих интервалах тангенс и котангенс меняются особенно быстро. В этой таблице углы отличаются на 1′; поправок находить не надо.

**§ 79.** Таблицы XII, XIII, XIV, XV и XVI содержат логарифмы синусов и косинусов, тангенсов и котангенсов. Пользуются этими таблицами так же, как предыдущими.

**Примеры.** $\lg \sin 20°18' = \bar{1},5402$; $\lg \operatorname{tg} 61°54' = 0,2725$;

$\lg \cos 26°48' = \bar{1},9506$; $\lg \operatorname{ctg} 18°30' = 0,4755$

**§ 80. Употребление пятизначных таблиц логарифмов.** Опишем устройство таблиц Пржевальского.

В этих таблицах на стр. 62—151 стереотипного издания содержатся логарифмы синуса, косинуса, тангенса, котангенса острых углов, причём углы идут через 1′, а логарифмы даны с точностью до $^1/_2$ стотысячной.

Отрицательные характеристики для удобства при печатании увеличены на 10, так что характеристика 9 обозначает $\bar{1}$, характеристика 8 обозначает $\bar{2}$ и т. д.

Числа градусов более 45 напечатаны внизу страницы; когда берутся эти числа, то минуты берутся справа, а названия функций — снизу.

Если угол содержит секунды, то к табличному логарифму делается поправка. Эта поправка вычисляется с помощью пропорции, так как небольшие изменения угла и небольшие изменения логарифма приблизительно пропорциональны.

**Пример 1.** Найти $\lg \sin 34°16'43''$.

Решение. На стр. 130 находим:

$$\lg \sin 34°16' = \bar{1},75054.$$

Выписываем табличную разность $d = 19$. Составляем пропорцию:

$$x : 19 = 43'' : 60'',$$

где $x$ — искомая поправка логарифма, соответствующая 43″.

Находим:

$$x = 19 \cdot \frac{43}{60} \approx 14.$$

Итак,

$$\lg \sin 34°16'43'' = \bar{1},75068.$$

Для нахождения поправки можно пользоваться таблич-ками, помещёнными сбоку каждой страницы.

В приведённом примере по табличке сначала берём поправку на 40″ (получится 12,7) и потом на 3″ (получится 0,95), вся поправка будет равна приблизительно 14.

Действие надо располагать так:

$$\begin{array}{r} \lg \sin 34°16' = \bar{1},75054 \quad d = 19. \\ +43'' \quad +14 \\ \hline \lg \sin 34°16'43'' = \bar{1},75068. \end{array}$$

**Пример 2.** Найти $\lg \cos 29°45'23''$.

Решение. $\lg \cos 29°45' = \bar{1},93862 \quad d = 7.$

$$\begin{array}{r} +23'' \quad -3 \\ \hline \lg \cos 29°45'23'' = \bar{1},93859. \end{array}$$

Поправку вычитаем, так как с увеличением угла косинус уменьшается, его логарифм — также.

**Пример 3.** Найти $\lg \operatorname{tg} 57°20'30''$.

Решение. $\lg \operatorname{tg} 57°20' = 0,19303 \quad d = 28.$

$$\begin{array}{r} +30'' \quad +14 \\ \hline \lg \operatorname{tg} 57°20'30'' = 0,19317 \end{array}.$$

**Пример 4.** Найти угол $x$, если $\lg \sin x = 1,63623$.

Решение. На стр. 113 находим ближайший меньший угол и затем делаем поправку; действие располагаем так:

$$\begin{array}{r} \bar{1},63610 \ldots \ 25°38' \quad d = 26. \\ +13 \ldots \quad +30'' \\ \hline \bar{1},63623 \ldots 25°38'30'' \end{array}$$

$$x = 25°38'30''.$$

Поправку проще всего взять из столбика с заголовком 26, где на 3″ приходится поправка 1,3, а поправка 13 придётся на 30″.

**Пример 5.** Дано: $\lg \operatorname{tg} x = \bar{2},95696$; найти $x$.

Решение. $\bar{2},95627 \ldots 5°10' \quad d = 140.$

$$\frac{+69 \ldots +30''}{\bar{2},95696 \ldots 5°10'30''}$$

$$x = 5°10'30''.$$

**Пример 6.** Дано: $\lg \operatorname{ctg} x = 1,07085$; найти $x$.

Решение. $1,06984 \ldots 4°52' \quad d = 150.$

$$\frac{+101 \ldots \quad -40''}{1,07085 \ldots 4°51'20''}$$

$$x = 4°51'20''.$$

**§ 81. Случай очень большой табличной разности.** Отыскивая поправку к табличному логарифму или табличному углу, мы принимали, что изменения угла и изменения логарифма пропорциональны, но на самом деле это справедливо только приблизительно; если бы это было верно вполне, то для одной и той же функции все табличные разности были бы равны между собой, чего, однако, нет, хотя вообще они меняются очень медленно. Но на первых страницах таблицы для синуса, тангенса и котангенса очень малых углов (а следовательно, для косинуса, котангенса и тангенса углов, близких к 90°) логарифмические разности изменяются очень быстро, а потому в этих случаях предыдущий способ вычисления поправки ненадёжен. Приводим пример.

По обычному способу найдём:

$$\lg \sin 22'48'' = 7,80615 - 10 + 0,01930 \cdot \frac{8}{10} = 7,82159 - 10,$$

между тем как в более полных таблицах показано: $\lg \sin 22'48'' = 7,82166 - 10$; таким образом, обычный способ вычисления поправки здесь оказывается грубым (разница достигает 7 стотысячных).

По указанной причине в случае очень большой табличной разности (например для синуса и тангенса углов, меньших 2°) употребляют другой приём, а именно: принимают, что синусы и тангенсы очень малых углов пропорциональны самим углам (а остальные случаи сводят на этот).

Покажем этот приём на примерах.

**Пример 1.** Мы находим $\lg \sin 22'48''$ Применим новый способ. Будем иметь:

$$\frac{\sin 22'48''}{\sin 22'} = \frac{22'48''}{22'}, \text{ или } \frac{\sin 22'48''}{\sin 22'} = \frac{22,8}{22};$$

отсюда:

$$\lg \sin 22'48'' = \lg \sin 22' + (\lg 22,8 - \lg 22) =$$
$$= 7,80615 - 10 + (1,35793 - 1,34242) = 7,82166 - 10,$$

что согласно с более полными таблицами.

**Пример 2.** Найти $\lg \operatorname{tg} 88°56'20''$.

По обычному способу получается 1,73232, а должно быть (по полным таблицам) 1,73231. Применим теперь новый способ.

Имеем: 1) $\operatorname{tg} 88°56'20'' = \operatorname{ctg} 1°03'40'' = \frac{1}{\operatorname{tg} 1°03'40''}$;

2) $\frac{\operatorname{tg} 1°03'40''}{\operatorname{tg} 1°03'} = \frac{1°03'40''}{1°03'}$, или $\frac{\operatorname{tg} 1°03'40''}{\operatorname{tg} 1°03'} = \frac{191}{189}$.

Произведя вычисление, получим:

а) $\lg \operatorname{tg} 1°03'40'' = 8{,}26312 - 10 + (2{,}28103 - 2{,}27646) = 8{,}26769 - 10$;

б) $\lg \operatorname{ctg} 1°03'40'' = \lg 1 - \lg \operatorname{tg} 1°03'40'' = 1{,}73231$,

что и должно быть (по полным таблицам).

**Пример 3.** Дано: $\lg \operatorname{ctg} \alpha = 2{,}20443$; требуется найти $\alpha$.

По обычному способу получим $\alpha = 21'29''$. Применим новый способ.

Берём $\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg 1 - \lg \operatorname{ctg} \alpha = 7{,}79557 - 10$; ближайший меньший логарифм в таблице есть 7,78595, и ему соответствует угол в 21′; составим пропорцию:

$$\frac{\alpha}{21'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 21'};$$

полагая теперь $\alpha = x''$, получим:

$$\frac{x}{1260} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 21'},$$

откуда:

$$\lg x = \lg 1260 + (\lg \operatorname{tg} \alpha - \lg \operatorname{tg} 21') = 3{,}10999.$$

Найдя целое число, наиболее подходящее к этому логарифму, будем иметь $x = 1288$. Итак, $\alpha = 1288'' = 21'28''$. Тот же самый угол получается и по более полным таблицам.

**§ 82. Степень точности при определении угла по пятизначным таблицам.** Для того чтобы два логарифма какой-нибудь тригонометрической функции различались между собой на 0,00001, надо, чтобы соответствующие им углы отличались один от другого на $\frac{60''}{d}$, где $d$ означает величину табличной разности (в стотысячных долях); если же разность двух углов будет меньше $\frac{60''}{d}$, то соответствующие логарифмы будут различаться менее чем на 0,00001, и, следовательно, при ограничении пятью десятичными знаками они окажутся равными. Отсюда следует, что ошибка в определении угла по логарифму может доходить до $\frac{60''}{d}$.

В случае синуса для углов до 12° имеем $d > 60$, а следовательно, величина $\frac{60''}{d}$ менее 1″; затем она начинает возрастать, при 85° достигает 1′, а при углах, близких к 90°,

один и тот же логарифм соответствует уже нескольким углам, так что здесь колебание в угле может достигать нескольких минут. Таким образом, по синусу, а следовательно, и по косинусу углы определяются: с малой точностью; особенно же неточно определяются: по синусу — углы, близкие к прямому, а следовательно, по косинусу — углы, близкие к нулю.

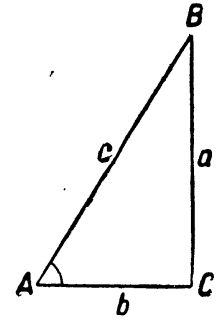
Логарифмы тангенса и котангенса дают бо́льшую степень точности, потому что с изменением угла тангенс и котангенс изменяются гораздо быстрее, чем синус и косинус, так что табличная разность их логарифмов (общая) всегда более соответствующей разности для синуса и косинуса. В случае тангенса и котангенса всего хуже определяются углы, близкие к 45°, но и там возможная ошибка остаётся менее $\frac{60''}{25}$, т. е. менее 2,4″.

# О РЕШЕНИИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

## IX. Прямоугольные треугольники.

**§ 83. Соотношения между элементами прямоугольного треугольника.** В § 20 были выведены тригонометрические соотношения между элементами прямоугольного треугольника; а именно, из определения тригонометрических функций были выведены формулы (черт. 40):

$$\sin A = \frac{a}{c}; \quad \cos A = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}.$$



Черт. 40.

Определяя из этих формул $a$, $b$ и $c$, найдём:

1) $a = c \cdot \sin A$; 2) $b = c \cdot \cos A$;
3) $a = b \cdot \operatorname{tg} A$.

Словесные формулировки приведены в § 20—21. К этим формулам надо добавить ещё три, известные из геометрии:

$$A + B = 90°; \quad c^2 = a^2 + b^2; \quad S = \frac{1}{2} ab.$$

**§ 84.** *Между элементами всякого треугольника существуют только три независимых соотношения.* В состав треугольника входят три стороны и три угла; но из этих шести элементов достаточно иметь три (исключая случай трёх углов), чтобы можно было построить треугольник и тем самым получить остальные т р и элемента. Отсюда следует, что и при вычислении в треугольнике можно определить т р и элемента по данным остальным; а для этого

число независимых уравнений между элементами треугольника должно быть равно также трём. Если уравнений получено более трёх, то некоторые из них будут уже следствием других.

В прямоугольном треугольнике основными соотношениями считаются обыкновенно следующие:

$$A+B=90^\circ;\quad a=c\cdot\sin A;\quad b=c\cdot\cos A.$$

Остальные можно вывести из них.

**§ 85. Решение прямоугольных треугольников.** Основными элементами треугольника считаются стороны и углы. Поэтому при решении прямоугольного треугольника, в зависимости от того, какие элементы даны, могут представиться 4 случая, разобранные в следующих параграфах. При этом в числе данных непременно должен быть один линейный элемент, так как иначе нельзя узнать размеры треугольника; по трём углам можно построить сколько угодно подобных треугольников.

Решение треугольников (как и решение всяких математических задач) проводится сначала, по возможности, до конца в общем виде; затем подставляются числовые данные и производятся вычисления. Все нижеследующие примеры решены с помощью таблиц Брадиса, сначала по натуральным значениям тригонометрических функций, потом — при помощи таблиц логарифмов.

На случай пользования пятизначными таблицами даны примеры решения треугольников и по этим таблицам.

**§ 86.** *1-й случай.* Даны гипотенуза и острый угол ($c$ и $A$). Найти другой острый угол, катеты и площадь ($B$, $a$, $b$, $S$).

I. Решение в общем виде:

$$B=90^\circ-A;\quad a=c\cdot\sin A;\quad b=c\cdot\cos A;$$

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{c^2}{2}\cdot\sin A\cdot\cos A=\frac{c^2}{4}\cdot\sin 2A.$$

II. Числовой пример: $c=627$; $A=23^\circ30'$.

Решение.

$B=90^\circ-23^\circ30'=66^\circ30'$; $a=627\cdot\sin 23^\circ30'$.

По таблице IX Брадиса находим $\sin 23^\circ30'=0{,}3987$; следовательно:

$a=627\cdot 0{,}3987=249{,}9849$;

$a\approx 250$ (лин. единиц);

$b=627\cdot\cos 23^\circ30'=627\cdot 0{,}9171=575{,}0217$;

$b\approx 575$ (лин. единиц);

$S=\frac{1}{2}\cdot 249{,}98\cdot 575{,}02=71\,872$ (кв. единиц).

**§ 87.** *2-й случай.* Даны катет и острый угол ($a$ и $A$). Найти $B$, $c$, $b$, $S$.

I. Решение в общем виде:

$$B = 90° - A; \quad c = \frac{a}{\sin A}; \quad b = \frac{a}{\operatorname{tg} A} = a \cdot \operatorname{ctg} A;$$

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{a^2}{2} \cdot \operatorname{ctg} A.$$

II. Числовой пример: $a = 18$; $A = 47°$.

Решение.

$$B = 90° - 47° = 43°; \quad c = \frac{18}{\sin 47°} = \frac{18}{0{,}7314};$$

$c = 24{,}61$ (лин. единиц);

$b = 18 \cdot \operatorname{ctg} 47° = 18 \cdot 0{,}9325$;

$b = 16{,}79$ (лин. единиц);

$S = \frac{18^2}{2} \cdot 0{,}9325 = 151{,}07$ (кв. единиц).

**§ 88.** *3-й случай.* Даны гипотенуза и катет ($c$ и $a$). Найти $A$, $B$, $b$, $S$.

I. Решение в общем виде:

$$\sin A = \frac{a}{c}; \quad \cos B = \frac{a}{c}; \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}; \quad S = \frac{a}{2}\sqrt{c^2 - a^2}.$$

II. Числовой пример: $c = 65$; $a = 16$.

Решение.

$$\sin A = \frac{16}{65} = 0{,}2461; \quad A = 14°12' + 3' = 14°15';$$

$$B = 90° - 14°15' = 75°45';$$

$$b = \sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{(65 + 16) \cdot (65 - 16)} = \sqrt{81 \cdot 49} = 9 \cdot 7;$$

$b = 63$ (лин. единиц);

$S = \frac{16}{2} \cdot 63 = 504$ (кв. единиц).

**§ 89.** *4-й случай.* Даны оба катета ($a$ и $b$). Найти $A$, $B$, $c$, $S$.

I. Решение в общем виде:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad S = \frac{ab}{2}.$$

II. Числовой пример: $a = 25$; $b = 40$.

Решение.

$$\operatorname{tg} A = \frac{25}{40} = 0{,}625; \quad A = 32°; \quad B = 58°;$$

$c = \sqrt{25^2 + 40^2} \approx 47{,}2$; $S = 500$ (кв. единиц).

## Решение прямоугольных треугольников при помощи четырёхзначных таблиц логарифмов.

**§ 90.** *1-й случай.* Даны гипотенуза и острый угол: $c = 287{,}4$; $A = 42°06'$. Найти $B$, $a$, $b$, $S$.

Решение.

1) $B = 90° - 42°06' = 47°54'$.

2) $a = c \sin A$;

$a = 287{,}4 \cdot \sin 42°06'$;

$\lg a = \lg 287{,}4 + \lg \sin 42°06'$;

$+ \quad \lg 287{,}4 = 2{,}4585$

$\lg \sin 42°06' = \bar{1}{,}8264$

$\lg a = 2{,}2849$

$a = 192{,}7$.

3) $b = c \cos A$;

$b = 287{,}4 \cos 42°06'$;

$\lg b = \lg 287{,}4 + \lg \cos 42°06'$.

$+ \quad \lg 287{,}4 = 2{,}4585$

$\lg \cos 42°06' = \bar{1}{,}8704$

$\lg b = 2{,}3289$

$b = 213{,}2$.

4) $S = \frac{1}{2} ab$; $S = 0{,}5 \cdot 192{,}7 \cdot 213{,}2$;

$\lg S = \lg 0{,}5 + \lg 192{,}7 + \lg 213{,}2$;

$\lg 0{,}5 = \bar{1}{,}6990$

$+ \lg 192{,}7 = 2{,}2849$

$\lg 213{,}2 = 2{,}3289$

$\lg S = 4{,}3128$; $S = 20\,550$ (кв. единиц).

**§ 91.** *2-й случай.* Даны катет и острый угол: $a = 797{,}9$; $A = 66°36'$. Найти $B$, $c$, $b$, $S$.

Решение.

1) $B = 90° - 66°36' = 23°24'$.

2) $c = \frac{a}{\sin A}$; $c = \frac{797{,}9}{\sin 66°36'}$;

$\lg c = \lg 797{,}9 - \lg \sin 66°36'$;

$\lg 797{,}9 = 2{,}9020$

$- \quad \lg \sin 66°36' = \bar{1}{,}9627$

$\lg c = 2{,}9393$

$c = 869{,}6$.

3) $b = a \cdot \operatorname{ctg} A$;

$b = 797{,}9 \cdot \operatorname{ctg} 66°36'$;

$\lg b = \lg 797{,}9 + \lg \operatorname{ctg} 66°36'$;

$\lg 797{,}9 = 2{,}9020$

$+ \quad \lg \operatorname{ctg} 66°36' = \bar{1}{,}6362$

$\lg b = 2{,}5382$

$b = 345{,}3$.

4) $S = \frac{1}{2} ab$; $S = \frac{1}{2} \cdot 797{,}9 \cdot 345{,}3$;

$\lg S = \lg 0{,}5 + \lg 797{,}9 + \lg 345{,}3$;

$\lg 0{,}5 = \bar{1}{,}6990$

$+ \lg 797{,}9 = 2{,}9020$

$\lg 345{,}3 = 2{,}5382$

$\lg S = 5{,}1392$; $S = 137\,800$ (кв. единиц).

§ 92. *3-й случай.* Даны катет и гипотенуза: $a = 35{,}47$, $c = 45{,}93$. Найти $A$, $B$, $b$, $S$.

Решение.

1) $\sin A = \frac{a}{c}$; $\sin A = \frac{35{,}47}{45{,}93}$;

$\lg \sin A = \lg 35{,}47 - \lg 45{,}93$;

$\lg 35{,}47 = 1{,}5499$

$-\ \lg 45{,}93 = 1{,}6621$

$\lg \sin A = \bar{1}{,}8878$

$A = 50°34'$.

2) $B = 90° - 50°34' = 39°26'$;

3) $b = a \cdot \operatorname{ctg} A$;

$b = 35{,}47 \cdot \operatorname{ctg} 50°34'$;

$\lg b = \lg 35{,}47 + \lg \operatorname{ctg} 50°34'$;

$\lg 35{,}47 = 1{,}5499$

$+\ \lg \operatorname{ctg} 50°34' = \bar{1}{,}9151$

$\lg b = 1{,}4650$

$b = 29{,}17$.

4) $S = \frac{1}{2} ab$; $S = \frac{1}{2} \cdot 35{,}47 \cdot 29{,}17$;

$\lg S = \lg 0{,}5 + \lg 35{,}47 + \lg 29{,}17$;

$\lg 0{,}5 = \bar{1}{,}6990$

$+\ \lg 35{,}47 = 1{,}5499$

$\lg 29{,}17 = 1{,}4650$

$\lg S = 2{,}7139$. $S = 517{,}5$ (кв. единиц).

§ 93. *4-й случай.* Даны оба катета: $a = 104$; $b = 20{,}49$. Найти $A$, $B$, $c$, $S$.

Решение.

1) $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg} A = \frac{104}{20{,}49}$;

$\lg \operatorname{tg} A = \lg 104 - \lg 20{,}49$;

$\lg 104 = 2{,}0170$

$-\ \lg 20{,}49 = 1{,}3115$

$\lg \operatorname{tg} A = 0{,}7055$

$A = 78°51'$.

2) $B = 90° - 78°51' = 11°09'$.

3) $c = \frac{a}{\sin A}$; $c = \frac{104}{\sin 78°51'}$;

$\lg c = \lg 104 - \lg \sin 78°51'$;

$\lg 104 = 2{,}0170$

$-\ \lg \sin 78°51' = \bar{1}{,}9917$

$\lg c = 2{,}0253$

$c = 106$.

4) $S = \frac{1}{2} ab$; $S = \frac{1}{2} \cdot 104 \cdot 20{,}49$;

$\lg S = \lg 52 + \lg 20{,}49$;

$\lg 52 = 1{,}7160$

$+\ \lg 20{,}49 = 1{,}3115$

$\lg S = 3{,}0275$; $S = 1065$ (кв. единиц).

## Примеры решения прямоугольных треугольников с помощью пятизначных таблиц.

**§ 94.** *1-й случай.* Даны гипотенуза и острый угол (*c* и *A*)

Числовой пример: $c = 457$; $A = 32°40'15''$.

Вычисление:

$$B = 90° - A = 57°19'45''.$$

| | |
|---|---|
| $a = c \cdot \sin A$ | $b = c \cdot \sin B$ |
| $\lg c = 2{,}65992$ | $\lg c = 2{,}65992$ |
| $+\lg \sin A = 9{,}73224 - 10$ | $+\lg \sin B = 9{,}92520 - 10$ |
| $\lg a = 2{,}39216$ | $\lg b = 2{,}58512$ |
| $a = 245{,}69$ | $b = 384{,}7$ |

$S = 0{,}5 \cdot ab.$

$$\begin{array}{r} \lg 0{,}5 = 9{,}69897 - 10. \\ +\lg a = 2{,}39216 \\ +\lg b = 2{,}58512 \\ \hline \lg S = 4{,}67625 \end{array} \qquad S = 47\,451 \text{ (кв. единиц)}.$$

**§ 95.** *2-й случай.* Даны катет и острый угол (*a* и *A*).

Числовой пример: $a = 9{,}82$; $A = 63°21'45''$.

Вычисление:

$$B = 90° - A = 26°38'15''.$$

| | |
|---|---|
| $c = \dfrac{a}{\sin A}$ | $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg} A}$ |
| $\lg a = 0{,}99211$ | $\lg a = 0{,}99211$ |
| $-\lg \sin A = 9{,}95127 - 10$ | $-\lg \operatorname{tg} A = 0{,}29966$ |
| $\lg c = 1{,}04084$ | $\lg b = 0{,}69245$ |
| $c = 10{,}986$ | $b = 4{,}9255$ |

Площадь вычислим по формуле: $\lg S = \lg 0{,}5 + \lg a + \lg b$; получим $S = 24{,}184$ (кв. единиц).

**§ 96.** *3-й случай.* Даны гипотенуза и катет (*c* и *a*).

Числовой пример: $c = 58{,}5$; $a = 47{,}54$.

Вычисление:

| | |
|---|---|
| $\sin A = \dfrac{a}{c}$ | $b = c \cdot \sin B$ |
| $\lg a = 1{,}67706$ | $\lg c = 1{,}76716$ |
| $-\lg c = 1{,}76716$ | $+\lg \sin B = 9{,}76548 - 10$ |
| $\lg \sin A = 9{,}90990 - 10$ | $\lg b = 1{,}53264$ |
| $A = 54°21'20''$ | $b = 34{,}091$ |
| $B = 90° - A = 35°38'40''.$ | |

Площадь $S = 810{,}34$ (кв. единиц).

*4-й случай.* Даны оба катета ($a$ и $b$).

Числовой пример: $a = 23\,214$; $b = 38\,947$.

Вычисление:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$$

$$\begin{array}{r} \lg a = 4{,}36575 \\ -\lg b = 4{,}59048 \\ \hline \lg \operatorname{tg} A = 9{,}77527 - 10 \\ A = 30°47'47'' \\ B = 59°12'13'' \end{array}$$

$$c = \frac{a}{\sin A}$$

$$\begin{array}{r} \lg a = 4{,}36575 \\ -\lg \sin A = 9{,}70926 - 10 \\ \hline \lg c = 4{,}65649 \\ c = 45\,341 \end{array}$$

Для площади получим:

$$S = b \cdot \frac{a}{2} = 38\,947 \cdot 11\,607 = 452\,057\,829 \text{ (кв. единиц).}$$

*Замечание.* Иногда для вычисления $c$ удобна также формула $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Пусть, например, $a = 400$ и $b = 503$; тогда легко найти непосредственно: $a^2 = 160\,000$, $b^2 = 253\,009$ и, следовательно, $c = \sqrt{413009}$. Применяя теперь логарифмы, получим: $\lg c = 2{,}80798$; $c = 642{,}65$.

## X. Косоугольные треугольники.

**§ 97. Соотношения между элементами косоугольного треугольника.** Начнём с геометрического соотношения между углами треугольника:

$$A + B + C = 180°.$$

Заметим некоторые следствия из него.

а) Так как сумма значений $A$ и $B + C$ равна 180°, то синусы их равны, а косинусы различаются знаками; поэтому $\sin(B + C) = \sin A$; $\cos(B + C) = -\cos A$;

$$\cos A = -\cos(B + C).$$

Точно так же: $\operatorname{tg}(B + C) = -\operatorname{tg} A$.

б) Так как сумма значений $\frac{A}{2}$ и $\frac{B+C}{2}$ равна 90°, то сходные функции их соответственно равны (§ 17); например:

$$\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2};\quad \sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2} \text{ и т. д.}$$

в) Полезно запомнить ещё следующие соотношения между углами треугольника:

1) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$;

2) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$;

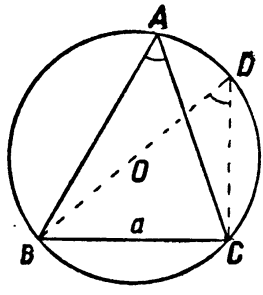
3) $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$.

Вывод этих формул предоставляется учащемуся.

**§ 98.** ***Лемма.*** *Во всяком треугольнике сторона равна диаметру описанного круга, умноженному на синус противолежащего угла.*

Обозначая радиус описанного круга через $R$, докажем, например, что $a = 2R \cdot \sin A$, где угол $A$ есть острый или тупой.

Доказательство. 1) Угол $A$ острый (черт. 41). В описанном круге из конца данной стороны проведём диаметр и соединим другой конец этой стороны и диаметра; получим прямоугольный треугольник. На чертеже 41 таким треугольником будет $BDC$; из него, на основании § 21, находим: $BC = BD \cdot \sin D$, или $a = 2R \cdot \sin D$; но $\angle D = \angle A$ [1]); следовательно, $a = 2R \cdot \sin A$.



Черт. 41.

2) Угол $A$ тупой. Сделаем такое же вспомогательное построение, как раньше. Из прямоугольного треугольника $BCE$ (черт. 42) найдём: $a = 2R \cdot \sin E$; но $E + A = 180°$, следовательно, $\sin E = \sin A$, поэтому $a = 2R \cdot \sin A$.

Итак, вообще:

$$a = 2R \cdot \sin A; \quad b = 2R \cdot \sin B; \quad c = 2R \cdot \sin C.$$

**§ 99.** ***Теорема.*** *Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов.*

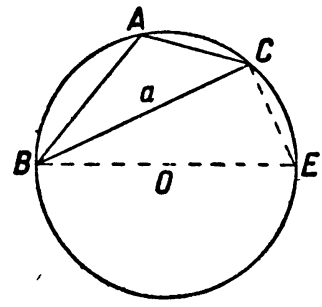
Требуется доказать, что $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

---

[1]) Тот и другой измеряются половиной дуги $BC$.

Доказательство. По § 98 для всякого треугольника как остроугольного, так и тупоугольного, имеем:

$$a = 2R \cdot \sin A;\ b = 2R \cdot \sin B;$$
$$c = 2R \cdot \sin C.$$



Черт. 42.

Отсюда находим:

$$2R = \frac{a}{\sin A};\ 2R = \frac{b}{\sin B};\ 2R = \frac{c}{\sin C},$$

следовательно:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Таким образом, для одного и того же треугольника частное от деления стороны на синус противолежащего угла есть величина постоянная, равная диаметру описанного круга.

Из соотношения $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, переставляя члены пропорции, получим:

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C,$$

т. е. *во всяком треугольнике стороны относятся между собой, как синусы противолежащих углов.*

Пример. Определить отношение $a : b : c$, если $A : B : C = 3 : 4 : 5$.

Так как $A + B + C = 180°$, то сначала разделим 180° в отношении 3 : 4 : 5; получим $A = 45°$, $B = 60°$ и $C = 75°$. Теперь по доказанному будем иметь:

$$a : b : c = \sin 45° : \sin 60° : \sin 75°.$$

Подставляя сюда

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \sin 75° = \cos\frac{30°}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

получим, освободясь от знаменателей:

$$a : b : c = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

**§ 100.** ***Теорема.*** *Сумма двух сторон треугольника так относится к их разности, как тангенс полусуммы противолежащих углов относится к тангенсу полуразности тех же углов.*

Доказательство. По § 98 находим:

$$a + b = 2R \cdot (\sin A + \sin B) \text{ и } a - b = 2R \cdot (\sin A - \sin B);$$

отсюда:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}.$$

Применяя здесь ко второй части формулу (XVII) (§ 65), получим:

$$(a+b):(a-b)=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}:\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}.$$

**§ 101. Формулы Мольвейде.** Так называются следующие две пропорции, которые содержат отношения суммы и разности двух сторон треугольника к третьей стороне:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}; \tag{1}$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}. \tag{2}$$

Доказательство: 1) По § 98:

$$a+b=2R\cdot(\sin A+\sin B) \text{ и } c=2R\cdot\sin C;$$

отсюда:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}. \tag{a}$$

Преобразуем вторую часть:

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}, \tag{b}$$

но $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$, так как $\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=90°$. По сокращении же дроби (b) будет окончательно:

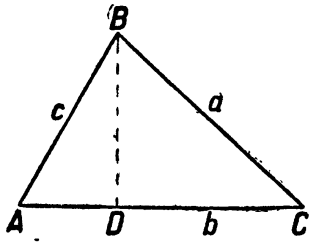
$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

2) Таким же образом получим:

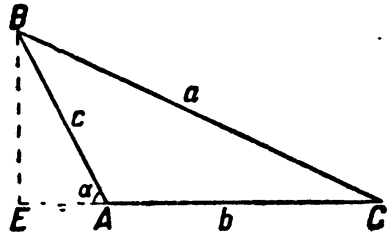
$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

**§ 102.** ***Теорема.*** *Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.*




Черт. 43.




Черт. 44.

Требуется доказать, что $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ (одинаково и в случае острого и в случае тупого угла).

Доказательство. 1) Если угол $A$ острый, то на основании теоремы геометрии о квадрате стороны, лежащей против острого угла, имеем (черт. 43):

$$a^2=b^2+c^2-2b\cdot AD,$$

но из прямоугольного треугольника $ABD$ можно заменить $AD$ через $c\cdot\cos A$; тогда получим:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A.$$

2) Если угол $A$ тупой, то применяем теорему о квадрате стороны против тупого угла треугольника (черт. 44). Получаем:

$$a^2=b^2+c^2+2b\cdot AE.$$

Из треугольника $ABE$ находим:

$$AE=c\cdot\cos\alpha;$$

но так как

$$\alpha=\angle BAE=180^\circ-A,$$

го

$$\cos\alpha = \cos(180° - A) = -\cos A;$$

поэтому

$$AE = -c \cdot \cos A.$$

Подставляя это выражение в геометрическую формулу, получим:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

т. е. то же самое, что и в первом случае.

**§ 103. Формулы для определения углов треугольника по трём сторонам:**

1) Из равенства $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ находим:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Но при многозначных числах эта формула неудобна.

2) Следующие преобразования той же формулы приводят к выражениям, пригодным для логарифмирования:

$$1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Заменяя левые части (по § 60) и полагая $a + b + c = 2p$, получим далее:

$$2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2(p-c)\cdot 2(p-b)}{2bc}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}. \qquad \text{(XX)}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2p\cdot 2(p-a)}{2bc}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}. \qquad \text{(XXI)}$$

Так как в треугольнике половина угла всегда менее 90°, то $\sin\frac{A}{2}$ и $\cos\frac{A}{2}$ положительны, что и принято во внимание при извлечении корня. Деля равенство (XX) на (XXI), найдём:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}. \qquad \text{(XXII)}$$

Формулы для определения углов $B$ и $C$ можно написать по аналогии с выведенными для угла $A$.

Формуле (XXII) можно придать другой вид, более удобный для вычисления в том случае, когда надо вычислить все три угла; а именно: умножая под корнем числитель и знаменатель на $p-a$, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Подкоренное выражение здесь не зависит от того, какой угол определяется, а потому, обозначая величину корня через $k$, будем иметь:

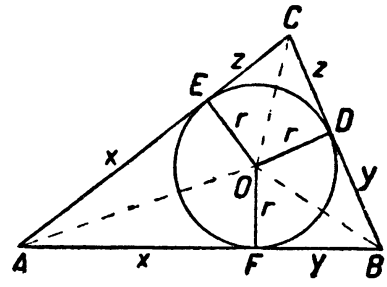
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{k}{p-a},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{k}{p-b},\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{k}{p-c},$$

где

$$k=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \qquad \text{(XXIII)}$$

**§ 104.** Тангенс половины угла треугольника можно определить также с помощью радиуса вписанного круга.

Пусть (черт. 45) будет: $O$ — центр вписанного круга; $D$, $E$ и $F$ — точки касания; $r$ — длина радиуса. Заметим, что линии $OA$, $OB$ и $OC$ делят углы треугольника пополам и что отрезки сторон при общей вершине равны (например $AE=AF$).



Черт. 45.

Сначала определим эти отрезки. Обозначая их в порядке вершин треугольника через $x$, $y$ и $z$, получим: $x+y+z=p$, но $y+z=BC=a$, следовательно, $x=p-a$. Подобным же образом $y=p-b$ и $z=p-c$. Теперь из прямоугольных треугольников найдём

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b},\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}. \qquad \text{(XXIV)}$$

Чтобы произвести вычисление по этим формулам, надо сперва определить $r$ (или только $\lg r$); для этого послужат геометрические формулы:

$$S=r\cdot p^{1}) \text{ и } S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

[1]) $S_{ABC}=S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}=\frac{c\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}+\frac{a\cdot r}{2}=$
$=r\cdot\frac{c+b+a}{2}=r\cdot p.$

откуда:

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

(Сравнивая последнее выражение с выражением $k$ в § 103, видим, что $k=r$.)

**§ 105. О независимых соотношениях между сторонами и углами косоугольного треугольника.** Этих соотношений должно быть три. Таковы соотношения:

$$A+B+C=180^\circ; \tag{a}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin b}=\frac{c}{\sin C}\ ^{1}). \tag{b}$$

Остальные можно вывести отсюда.

В § 100 и 101 образованы пропорции, производные от (b). В § 102 мы ссылались на геометрическую теорему. Теперь выведем то же самое из равенств (a) и (b).

Обозначая в равенстве (b) величину каждой части через $m$, будем иметь:

$$a=m\cdot\sin A;\quad b=m\cdot\sin B;\quad c=m\cdot\sin C. \tag{c}$$

Возьмём $a=m\cdot\sin A$. Так как по (a) $A+(B+C)=180^\circ$, то $\sin A=\sin(B+C)$; таким образом: $a=m\cdot\sin(B+C)$ и, следовательно:

$$a^2=m^2\cdot\sin^2(B+C). \tag{d}$$

Преобразуем:

$$\sin^2(B+C)=(\sin B\cdot\cos C+\cos B\cdot\sin C)^2=$$
$$=\sin^2 B(1-\sin^2 C)+(1-\sin^2 B)\sin^2 C+2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos B\cdot\cos C=$$
$$=\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\cdot\sin C(\cos B\cdot\cos C-\sin B\cdot\sin C)=$$
$$=\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos(B+C);$$

но $\cos(B+C)=-\cos A$; следовательно:

$$\sin^2(B+C)=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A.$$

Подставляя это в равенство (d), получим:

$$a^2=m^2\cdot\sin^2 B+m^2\cdot\sin^2 C-2(m\cdot\sin B)(m\cdot\sin C)\cos A,$$

или по равенству (c):

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A.$$

---

[1]) Тут две независимые пропорции: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ и $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.

**§ 106. Выражения для площади треугольника.** Из геометрии мы имеем следующие формулы:

$$S=\frac{1}{2}bh_b; \tag{1}$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \tag{2}$$

$$S=r\cdot p. \tag{3}$$

Выведем теперь выражения, содержащие углы

**§ 107.** а) Возьмём $S=\frac{1}{2}bh_b$. Для замены $h_b$ обратимся к чертежам 43 и 44: если угол $A$ острый, то $h_b=c\cdot\sin A$; если угол $A$ тупой, то $h_b=c\cdot\sin\alpha=c\cdot\sin(180^\circ-A)=$ $=c\cdot\sin A$. В обоих случаях имеем $h_b=c\cdot\sin A$, т. е. *во всяком треугольнике высота равна боковой стороне, умноженной на синус угла между этой стороной и основанием.*

Подставляя $h_b=c\cdot\sin A$ в формулу $S=\frac{1}{2}bh_b$, получим:

$$S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A, \tag{XXV}$$

т. е. *площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.*

б) Из соотношения $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ находим:

$$b=\frac{a\cdot\sin B}{\sin A}\quad\text{и}\quad c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A};$$

подставив эти выражения в $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$, получим:

$$S=\frac{a^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\sin A}.$$

Так как $\sin A=\sin(B+C)$, то вместо этой формулы можно взять ещё такую:

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin B\cdot\sin C}{\sin(B+C)}.$$

**§ 108.** а) Известное из геометрии выражение площади треугольника по трём сторонам нетрудно получить и с помощью тригонометрии.

Мы имеем $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$, но $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$, а заменив $\sin\frac{A}{2}$ и $\cos\frac{A}{2}$ по § 103, получим:

$$S=bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=$$
$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

б) По § 103 имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Перемножая соответственные части этих равенств, получим по сокращении под корнем:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}=$$
$$=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}}=\frac{S}{p^2};$$

отсюда:

$$S=p^2\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}. \qquad \text{(XXVI)}$$

(Между прочим, это формула полезна при решении треугольников как контрольная.)

**§ 109. Выражения для радиуса описанного круга.**

1) По § 98 $a=2R\cdot\sin A$; отсюда $R=\frac{a}{2\sin A}$.

2) Возьмём $R=\frac{a}{2\sin A}$. Определяя $\sin A$ из равенства $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$, получим $\sin A=\frac{2S}{bc}$, а после подстановки: $R=\frac{abc}{4S}$.

**§ 110. Выражения для радиуса вписанного круга.**

1) Из формулы $S=r\cdot p$ следует: $r=\frac{S}{p}$.

2) По чертежу 45 получим: $r=x\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, но $x=p-a$; следовательно, $r=(p-a)\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

3) По чертежу 45 из $\triangle BOD$ и $\triangle COD$ имеем: $y = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$ и $z = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$; складывая и заменяя $y + z$ через $a$, получим:

$$a = r \cdot \left(\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}\right) = r \cdot \frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}} = r \cdot \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}};$$

отсюда:

$$r = \frac{a \cdot \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

## Решение косоугольных треугольников по натуральным таблицам.

**§ 111.** *1-й случай.* Даны сторона и два угла ($a$, $B$, $C$). Найти $A$, $b$, $c$, $S$.

I. Решение в общем виде.

1) Для определения угла $A$ возьмём формулу суммы углов треугольника:

$$A + B + C = 180^\circ; \quad A = 180^\circ - (B + C).$$

2) Для определения сторон $b$ и $c$ воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}; \quad b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}; \quad b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin (B + C)}.$$

3) $\frac{a}{\sin A} = \frac{C}{\sin C}; \quad c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}; \quad c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin (B + C)}.$

4) Площадь определяется по одной из формул:

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C; \quad S = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin (B + C)}.$$

II. Числовой пример: $a = 37$; $B = 86^\circ 03'$; $C = 50^\circ 56'$.

1) $A = 180^\circ - (86^\circ 03' + 50^\circ 56') = 43^\circ 01'$.

2) $b = \frac{37 \cdot \sin 86^\circ 03'}{\sin 43^\circ 01'} = \frac{37 \cdot 0{,}9976}{0{,}6822}; \quad b = 54{,}1;$

3) $c = \frac{37 \cdot \sin 50^\circ 56'}{0{,}6822} = \frac{37 \cdot 0{,}7764}{0{,}6822}; \quad c = 42{,}1;$

4) $S=\frac{1}{2}\cdot 37\cdot 54{,}1\cdot \sin 50°56'$; $S=\frac{1}{2}\cdot 37\cdot 54{,}1\cdot 0{,}7764$;

$S=777$ (кв. единиц).

*2-й случай.* Даны две стороны и угол между ними ($a$, $b$, $C$). Найти $A$, $B$, $c$, $S$.

I. 1) Сторона $c$ найдётся по теореме косинусов:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C.$$

2) Угол $A$ теперь можно определить, пользуясь теоремой синусов:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C};\quad \sin A=\frac{a\cdot\sin C}{c}.$$

3) Подобным образом:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B};\quad \sin B=\frac{b\cdot\sin A}{a}.$$

4) Площадь определяется по формуле:

$$S=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot\sin C.$$

II. Числовой пример. Дано: $a=110$; $b=100$; $C=50°$. Найти $c$, $A$, $B$, $S$.

1) $c^2=110^2+100^2-2\cdot 110\cdot 100\ \cos 50°$;
$c^2=12\,100+10\,000-22\,000\cdot 0{,}6428$;
$c=89{,}21$;

2) $\sin A=\frac{110\cdot\sin 50°}{89{,}21}$; $\sin A=0{,}9445$; $A=70°49'$ или $109°11'$;

3) $\sin B=\frac{100\cdot 0{,}9445}{110}$; $\sin B=0{,}8586$; $B=59°10'$.

Проверка. $A+B+C=70°49'+59°10'+50°=$
$=179°59'$.

Проверка показывает, что наибольший угол $A$ острый, а не тупой.

4) $S=\frac{1}{2}\cdot 110\cdot 100\cdot\sin 50°=5500\cdot 0{,}766=4213$ (кв. единиц).

**Задача.** Дано: $a=50$; $c=30$; $B=60°$; найти $b$, $A$, $C$.

*Отв.* $b=43{,}59$; $A=83°21'$; $C=36°35'$.

**Задача.** Дано: $b=12$; $c=10$; $A=54°$. Найти площадь $S$.

*Отв.* 48,54.

**Задача.** Даны сторона треугольника $a=10$ *см* и прилежащие углы $B=50°$ и $C=70°$. Построить треугольник с помощью линейки и транспортира; построить описанную и вписанную окружности; вычислить $A$, $b$, $c$, $R$, $S$, $r$, проверить ответы измерением на чертеже.

## Решение косоугольных треугольников с помощью четырёхзначных логарифмических таблиц.

**§ 112.** *1-й случай.* Даны сторона и два угла ($a$, $B$, $C$). Найти $A$, $b$, $c$, $S$.

Решение производится по тому же плану, что и при помощи натуральных таблиц, но при окончательном вычислении формула логарифмируется и вычисляется по таблицам логарифмов.

Числовой пример. Дано: $a=1235$; $B=37°32'$; $C=115°18'$.

Решение.

1) $A=180°-(B+C)$;

$A=180°-(37°32'+115°18')=27°10'$;

2) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$; $b=\frac{a\cdot\sin B}{\sin A}$; $b=\frac{1235\cdot\sin 37°32'}{\sin 27°10'}$;

$\lg b=\lg 1235+\lg\sin 37°32'-\lg\sin 27°10'$;

$\lg 1235=3{,}0917$

$\lg\sin 37°32'=\bar{1},7847$ $\quad\lg\sin 27°10'=\bar{1},6595$;

$-\lg\sin 27°10'=0{,}3405$ $\quad-\lg\sin 27°10'=-\bar{1},6595=0{,}3405$.

$\lg b=3{,}2169$

$b=1648$;

3) $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$; $c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}$; $c=\frac{1235\cdot\sin 115°18'}{\sin 27°10'}$;

$\lg c=\lg 1235+\lg\sin 115°18'-\lg\sin 27°10'$;

$\lg 1235=3{,}0917$ $\quad\sin 115°18'=\sin(180°-64°42')=$

$\lg\sin 115°18'=\bar{1},9562$ $\quad=\sin 64°42'$;

$-\lg\sin 27°10'=0{,}3405$ $\quad\lg\sin 64°42'=\bar{1},9562$.

$\lg c=3{,}3884$

$c=2446$;

4) $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$; $S=\frac{1}{2}\cdot 1235\cdot 1648\cdot\sin 115^\circ 18'$;

$S=\frac{1}{2}\cdot 1235\cdot 1648\cdot\sin 64^\circ 42'$;

$\lg S=\lg 1235+\lg 824+\lg\sin 64^\circ 42'$;

$\lg 1235=3{,}0917$

$\lg\ 824=2{,}9159$

$\lg\sin 64^\circ 42'=\bar{1}{,}9532$

$\lg S=5{,}9638$; $S=920\,000$ (кв. единиц).

**§ 113.** *2-й случай.* Даны две стороны и угол между ними ($a$, $b$, $C$). Найти $A$, $B$, $c$, $S$.

Числовой пример: $a=42{,}53$; $b=29{,}81$; $C=47^\circ 14'$.

1) Прежде всего определим углы $A$ и $B$. Воспользуемся теоремой тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}};\quad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{(a-b)\cdot\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{a+b}.$$

Найдём требуемые величины:

$a+b=42{,}53+29{,}81=72{,}34$;

$a-b=42{,}53-29{,}81=12{,}72$;

$A+B=180^\circ-47^\circ 14'=132^\circ 46'$;

$\frac{A+B}{2}=66^\circ 23'$; $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{12{,}72\cdot\operatorname{tg}66^\circ 23'}{73{,}34}$;

$\lg\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\lg 12{,}72+\lg\operatorname{tg}66^\circ 23'-\lg 72{,}34$;

$\lg 12{,}72=1{,}1045$

$\lg\operatorname{tg}66^\circ 23'=0{,}3593$

$-\lg 72{,}34=\bar{2}{,}1407$

$\lg\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\bar{1}{,}6045.$

$\lg 72{,}34=1{,}8593$;

$-\lg 72{,}34=-1{,}8593=\bar{2}{,}1407.$

Находим угол $\frac{A-B}{2}$ по таблице логарифмов тангенсов:

$$\frac{A-B}{2}=21^\circ 55'.$$

Теперь мы знаем полуразность углов $A$ и $B$ и их полу сумму, т. е. имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными; складывая обе части этих уравнений, находим:

$$\frac{A+B}{2}=66°23';$$
$$\frac{A-B}{2}=21°55'$$
$$A=88°18'$$
$$B=44°28'.$$

2) Для определения стороны $c$ воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C};\quad c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A};\quad c=\frac{42{,}53\cdot\sin 47°14'}{\sin 88°18'};$$
$$\lg c=\lg 42{,}53+\lg\sin 47°14'-\lg\sin 88°18';$$
$$\lg 42{,}53=1{,}6287$$
$$\lg\sin 47°14'=\bar{1}{,}8657 \qquad \lg\sin 88°18'=\bar{1}{,}9998;$$
$$-\lg\sin 88°18'=0{,}0002 \qquad -\lg\sin 88°18'=0{,}0002.$$
$$\lg c=1{,}4946$$
$$c=31{,}23;$$

3) $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C;\quad S=\frac{1}{2}\cdot 42{,}53\cdot 29{,}81\cdot\sin 47°14';$

$$\lg S=\lg 0{,}5+\lg 42{,}53+\lg 29{,}81+\lg\sin 47°14';$$
$$\lg 0{,}5=\bar{1}{,}6990;$$
$$\lg 42{,}53=1{,}6287$$
$$\operatorname{tg} 29{,}81=1{,}4743$$
$$\lg\sin 47°14'=\bar{1}{,}8657$$
$$\lg S=2{,}6677;\quad S=465{,}2.$$

**§ 114.** *3-й случай.* Даны три стороны ($a$, $b$, $c$). Найти $A$, $B$, $C$ и $S$.

Углы определяются по формулам тангенса половины угла треугольника; площадь — по формуле Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Числовой пример: $a=15{,}37$; $b=21{,}42$; $c=13{,}83$.

1) Пишем формулу для определения угла $A$:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$$

определяем $p$ и производим все указанные формулой действия:

$$\begin{array}{ll} a = 15{,}37 & p - a = 9{,}94 \\ b = 21{,}42 & p - b = 3{,}89 \\ c = 13{,}83 & p - c = 11{,}48 \\ \hline 2p = 50{,}62 & \\ p = 25{,}31 & \end{array}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{3{,}89 \cdot 11{,}48}{25{,}31 \cdot 9{,}94}};$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(\lg 3{,}89 + \lg 11{,}48 - \lg 25{,}31 - \lg 9{,}94);$$

$$\begin{array}{rl} \lg\ 3{,}89 = 0{,}5899 & \lg 25{,}31 = 1{,}4033 \\ \lg 11{,}48 = 1{,}0599 & -\lg 25{,}31 = \bar{2}{,}5967 \\ -\lg 25{,}31 = \bar{2}{,}5967 & \lg\ 9{,}94 = 0{,}9974 \\ -\lg\ 9{,}94 = \bar{1}{,}0026 & -\lg\ 9{,}94 = \bar{1}{,}0026 \\ \hline \lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \cdot \bar{1}{,}2491; & \lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \bar{1}{,}6246; \end{array}$$

$$\frac{A}{2} = 22°51'; \quad A = 45°42'.$$

2) Определяем угол $B$:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}; \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{9{,}94 \cdot 11{,}48}{25{,}31 \cdot 3{,}89}};$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{2}(\lg 9{,}94 + \lg 11{,}48 - \lg 25{,}31 - \lg 3{,}89);$$

$$\begin{array}{rl} \lg\ 9{,}94 = 0{,}9974 & \lg 3{,}89 = 0{,}5899 \\ \lg 11{,}48 = 1{,}0599 & -\lg 3{,}89 = \bar{1}{,}4101; \\ -\lg 25{,}31 = \bar{2}{,}5967 & \\ -\lg\ 3{,}89 = \bar{1}{,}4101 & \\ \hline \lg \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0641; & \end{array}$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2} = 0{,}0320; \quad \frac{B}{2} = 47°06'; \quad B = 94°12'.$$

3) Определяем угол $C$:

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}};\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{9{,}94\cdot 3{,}89}{25{,}31\cdot 11{,}48}};$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}(\lg 9{,}94+\lg 3{,}89-\lg 25{,}31-\lg 11{,}48);$$

$$\lg\ 9{,}94=0{,}9974 \qquad \lg 11{,}48=1{,}0599;$$

$$\lg\ 3{,}89=0{,}5899 \qquad -\lg 11{,}48=-1{,}0599=\bar{2}{,}9401;$$

$$-\lg 25{,}31=\bar{2}{,}5967$$

$$-\lg 11{,}48=\bar{2}{,}9401$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\cdot\bar{1}{,}1241; \qquad \lg\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\bar{1}{,}5621;$$

$$\frac{C}{2}=20°03'; \quad C=40°06'.$$

Проверка. $A+B+C=45°42'+94°12'+40°06'=180°$ (однако небольшая погрешность в сумме углов возможна вследствие приближённости вычислений).

4) Площадь определяем по формуле Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$\lg S=\frac{1}{2}[\lg p+\lg(p-a)+\lg(p-b)+\lg(p-c)].$$

Подставляя все уже найденные логарифмы и вычисляя получим:

$$\lg S=2{,}0252; \qquad S=106 \text{ (кв. единиц)}.$$

**§ 115.** *4-й случай.* Даны две стороны и угол, противолежащий одной из них ($a$, $b$, $A$).

Решение. Из пропорции $\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}$ найдём $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$, с помощью чего определим угол $B$. Далее будем иметь:

$$C=180°-(A+B); \quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}; \quad S=\frac{ab}{2}\cdot\sin C.$$

Обратим внимание на вычисление угла $B$ (по $\sin B$). Так как в косоугольном треугольнике вообще угол может быть и острым и тупым, то величину $B$ надо искать между 0°

и 180°, а в этих границах одному и тому же синусу соответствуют два угла: острый, находимый из таблиц, и тупой, дополняющий его до 180°. Поэтому возникает сомнение, будут ли для треугольника пригодны оба угла или же только один из них и какой именно. Этот вопрос решается сравнением данных сторон, так как в треугольнике тупой угол может быть только против большей стороны.

Ввиду сказанного будет полезно сначала исследовать задачу по сравнительной величине данных сторон. (Предполагается, что $a$ и $b$ различны: при $a=b$ имеем $B=A$.)

*Исследование.* I. Случай $a>b$. При этом данный угол $A$, как лежащий против большей из известных сторон, может быть острый и тупой.

В равенстве $\sin B=\frac{b\cdot\sin A}{a}$ рассмотрим правую часть. Если $b<a$, то и подавно $b\cdot\sin A<a$, а поэтому получится $\sin B<1$ (или $\lg\sin B<0$), и, следовательно, задача будет иметь решение независимо от величины угла $A$. Определяемый угол $B$ в этом случае может быть только острым (но не тупым), так как сторона против него не есть бо́льшая.

II. Случай $a<b$. При этом данный угол $A$ должен быть острым, так как он лежит против стороны, которая менее другой.

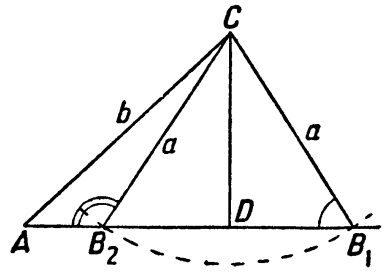
Обращаясь к равенству $\sin B=\frac{b\cdot\sin A}{a}$, заметим, что если $b>a$, то $b\cdot\sin A$ либо более $a$, либо равно $a$, либо менее $a$, в зависимости от величины угла $A$. Рассмотрим каждое предложение отдельно.

1) $b\cdot\sin A>a$, тогда $\sin B>1$ (или $\lg\sin B>0$), и задача не будет иметь решения.

2) $b\cdot\sin A=a$; тогда $\sin B=1$ (или $\lg\sin B=0$), и, следовательно, $B=90°$, т. е. треугольник оказывается прямоугольным.

3) $b\cdot\sin A<a$; тогда $\sin B<1$ (или $\lg\sin B<0$), и вопрос будет (как в п. 1) о двух углах, соответствующих такому синусу. Для треугольника в настоящем случае надо принять не только острый угол, но и тупой, потому что сторона $b$ более $a$, а сторона $c$ не может влиять на выбор угла $B$, так как сама определяется в зависимости от него. Соответственно двум значениям угла $B$ получим также по два значения для $C$, $c$ и $S$.

Итак, на основании сделанного исследования заключаем (относительно случая $\lg \sin B < 0$): если определяемый угол $B$ лежит против меньшей из данных сторон, то надо взять только острый угол; если же он лежит против большей стороны, то задача допускает два решения.



Черт. 46.

Результаты предыдущего исследования вполне совпадают с тем, что даёт построение треугольника по тем же самым данным (заметим, что $b \cdot \sin A$ будет выражать высоту треугольника относительно стороны $c$). Чертёж 46 соответствует случаю II, п. 3): искомые треугольники суть $\triangle ACB_1$ и $\triangle ACB_2$, причём $\angle AB_1C + \angle AB_2C = 180°$. Предоставляем самому учащемуся сделать построение в остальных случаях.

Числовой пример. I. Дано: $a = 700$; $b = 650$; $A = 40°25'$.

1) Вычисляем угол $B$:

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}; \quad \sin B = \frac{650 \cdot \sin 40°25'}{700};$$

$$\lg \sin B = \lg 650 + \lg \sin 40°25' - \lg 700;$$

$$\lg 650 = 2{,}8129 \qquad \lg 700 = 2{,}8451;$$

$$\lg \sin 40°25' = \bar{1}{,}8118 \qquad -\lg 700 = \bar{3}{,}1549.$$

$$-\lg 700 = \bar{3}{,}1549$$

$$\lg \sin B = \bar{1}{,}7796$$

$$B = 37°.$$

2) Вычисляем угол $C$:

$$C = 180° - (40°25' + 37°) = 102°35'.$$

3) Вычисляем сторону $c$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; \quad c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}; \quad c = \frac{700 \cdot \sin 102°35'}{\sin 40°25'};$$

$$\lg c = \lg 700 + \lg \sin 102°35' - \lg \sin 40°25';$$

$$\lg 700 = 2{,}8451 \qquad \lg \sin 40°25' = \bar{1}{,}8118;$$

$$\lg \sin 102°35' = \bar{1}{,}9894 \qquad -\lg \sin 40°25' = 0{,}1882;$$

$$-\lg \sin 40°25' = 0{,}1882 \qquad \sin 102°35' = \sin 77°25';$$

$$\lg c = 3{,}0227 \qquad \lg \sin 77°25' = \bar{1}{,}9894.$$

$$c = 1054;$$

II. Дано: $a=4$; $b=7$; $A=30°$.

1) Вычисляем угол $B$:

$$\sin B=\frac{b\cdot\sin A}{a};\quad \sin B=\frac{7\cdot\sin 30°}{4};$$

$$\lg\sin B=\lg 7+\lg\sin 30°-\lg 4;$$

$$\lg 7=0{,}8451\qquad \lg 4=0{,}6021;$$

$$\lg\sin 30°=\bar{1},6990\qquad -\lg 4=-0{,}6021=\bar{1},3979.$$

$$\underline{-\lg 4=\bar{1},3979}$$

$$\lg\sin B=\bar{1},9420;$$

$$B_1=61°03';\quad B_2=118°57'.$$

2) Угол $C$ тоже может иметь два значения:

$$C_1=180°-A-B_1;\ C_2=180°-A-B_2;$$

$$C_1=180°-30°-61°03'=88°57';$$

$$C_2=180°-30°-118°57'=31°03',$$

3) Точно так же сторона $c$ будет иметь два значения:

$$c_1=7{,}999;\ c_2=4{,}126.$$

## Решение косоугольных треугольников с помощью пятизначных таблиц.

**§ 116.** *1-й случай.* Даны сторона и два угла ($a$, $B$, $C$).

Числовой пример: $a=253$; $B=38°50'48''$; $C=112°34'$.

1) Вычисление $A$.

$$B=38°50'48''$$
$$\underline{C=112°34'}$$
$$B+C=151°24'48''$$
$$A=28°35'12''.$$

2) Вычисление $b$.

$$\lg a=2{,}40312$$
$$\underline{-\lg\sin A=9{,}67987-10}$$
$$\lg 2R=2{,}72325$$
$$\underline{+\lg\sin B=9{,}79743-10}$$
$$\lg b=2{,}52068$$
$$b=331{,}65.$$

3) Вычисление $c$.

$$\lg 2R=2{,}72325$$
$$\underline{+\lg\sin C=9{,}96541-10}$$
$$\lg c=2{,}68866$$
$$c=488{,}27.$$

4) Вычисление $S$.

$$S=0{,}5\cdot bc\sin A$$
$$\lg 0{,}5=9{,}69897-10$$
$$\lg b=2{,}52068$$
$$\underline{+\lg c=2{,}68866}$$
$$\lg\sin A=9{,}67987-10$$
$$\lg S=4{,}58818$$
$$S=38742\text{ (кв. единиц)}.$$

Контрольное вычисление: $\left[a=(c+b)\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C-B}{2}}\right]$.

$$c = 488{,}27$$
$$b = 331{,}65$$
$$c + b = 819{,}92$$
$$C = 112°34'$$
$$B = 38°50'48''$$
$$C - B = 73°43'12''$$
$$\frac{C-B}{2} = 36°51'36''$$
$$\frac{A}{2} = 14°17'36''$$

$$\lg (c+b) = 2{,}91377$$
$$+ \lg \sin \frac{A}{2} = 9{,}39250 - 10$$
$$2{,}30627$$
$$- \lg \cos \frac{C-B}{2} = 9{,}90315 - 10$$
$$\lg a = 2{,}40312,$$

что совпадает с начальным $\lg a$ (см. вычисление $b$).

**§ 116a.** *2-й случай.* Даны две стороны и угол между ними ($b$, $c$, $A$).
Числовой пример: $b = 1123$; $c = 2034$; $A = 72°15'19''$.
1) Вычисление углов $B$ и $C$.

$$C + B + A = 180°$$
$$A = 72°15'19''$$
$$C + B = 107°44'41''$$
$$\frac{C+B}{2} = 53°52'21''$$
$$\pm \frac{C-B}{2} = 21°34'13''$$
$$C = 75°26'34''$$
$$B = 32°18'08''.$$

$$\operatorname{tg} \frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b} \cdot \operatorname{tg} \frac{C+B}{2}$$
$c = 2034$ | $c - b = 911$
$b = 1123$ | $c + b = 3157$
$$\lg (c-b) = 2{,}95952$$
$$- \lg (c+b) = 3{,}49927$$
$$9{,}46025 - 10$$
$$+ \lg \operatorname{tg} \frac{C+B}{2} = 0{,}13671$$
$$\lg \operatorname{tg} \frac{C-B}{2} = 9{,}59696 - 10.$$

2) Вычисление $a$.

$$\lg b = 3{,}05038$$
$$+ \lg \sin A = 9{,}97883 - 10$$
$$3{,}02921$$
$$- \lg \sin B = 9{,}72786 - 10$$
$$\lg a = 3{,}30135$$
$$a = 2001{,}5$$

3) Вычисление $S$.

$$S = (b \cdot \sin A) \cdot \frac{c}{2}$$
$$\lg (b \cdot \sin A) = 3{,}02921\ ^{1})$$
$$+ \lg \frac{c}{2} = 3{,}00732$$
$$\lg S = 6{,}03653$$
$$S = 1\,087\,750 \text{ (кв. единиц)}.$$

**§ 116b.** *3-й случай.* Даны три стороны ($a$, $b$, $c$).
Числовой пример: $a = 215$; $b = 500$; $c = 427$.

$$a = 215$$
$$b = 500$$
$$c = 427$$
$$2p = 1142$$
$$p = 571$$
$$p - a = 356$$
$$p - b = 71$$
$$p - c = 144.$$

Вычисление $\lg k$.
$$\lg (p-a) = 2{,}55145$$
$$+ \lg (p-b) = 1{,}85126$$
$$\lg (p-c) = 2{,}15836$$
$$6{,}56107$$
$$- \lg p = 2{,}75664$$
$$3{,}80443$$
$$\lg k = 1{,}90222$$

[1]) Взято из вычисления $a$.

| Вычисление $A$. | Вычисление $B$. | Вычисление $C$. |
|---|---|---|
| $\lg k = 1{,}90222$ | $\lg k = 1{,}90222$ | $\lg k = 1{,}90222$ |
| $-\lg(p-a) = 2{,}55145$ | $-\lg(p-b) = 1{,}85126$ | $-\lg(p-c) = 2{,}15836$ |
| $\lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} = 9{,}35077-10$ | $\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2} = 0{,}05096$ | $\lg \operatorname{tg}\frac{C}{2} = 9{,}74386-10$ |
| $\frac{A}{2} = 12°38'26''$ | $\frac{B}{2} = 48°21'14''$ | $\frac{C}{2} = 29°22''$ |
| $B = 25°16'52''.$ | $B = 96°42'28''.$ | $C = 58°44''.$ |

Вычисление $S$. $S = pr = pk,$

$\lg S = \lg p + \lg k = 4{,}65886;$

$S = 45\,589$ (кв. единиц).

Проверка.

$$\begin{array}{r} A = 25°16'52'' \\ +B = 96°42'28'' \\ C = 58°\ \ 44'' \\ \hline 180°\ \ 4'' \end{array}$$

Лишние 4″ объясняются приближённостью вычисления.

## XI. Об измерениях на местности.

**§ 117. Общие замечания.** При составлении землемерных планов, а также в некоторых других случаях приходится определять величину линий и углов, нанесённых на местности. Основные данные находят непосредственным измерением — с помощью особых приборов, остальные — посредством вычисления; в последнем случае требуется применение тригонометрии.

**§ 118. Измерение линий.** Прямая линия на местности указывается какими-нибудь хорошо заметными предметами, помещёнными на её концах. Если длина измеряемой линии значительна, то её надо сначала провешить, т. е. поставить ряд вех [1]) по её направлению.

Для непосредственного измерения линий на местности наиболее употребительны землемерная цепь и мерительная лента.

Цепь, выходящая теперь из употребления, делается из негибкой железной проволоки. Она имеет в длину 20 *м* и состоит из 100 прямых звеньев, соединённых промежуточными кольцами.

Применяемая теперь мерительная лента изготовляется из тонкой стальной полосы. Она имеет длину в 10—15 или чаще всего 20 *м* и размечена на десятые доли метра.

При пользовании мерительной лентой длина линии выражается в метрах и десятичных долях метра.

[1]) Веха — длинный кол со значком.

**§ 119. Угломерные инструменты.** Инструменты, служащие для определения градусной величины угла, называются угломерными.

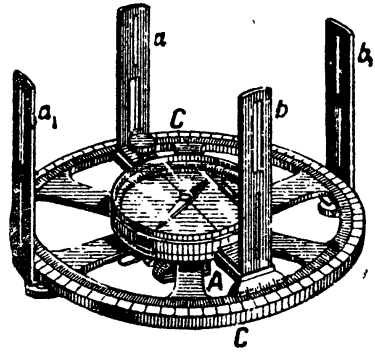
Одни из них служат для определения угла только в горизонтальной плоскости, другие же измеряют угол и в горизонтальной и в вертикальной плоскостях. (Углы в наклонной плоскости определяются обыкновенно с помощью вычисления.)

Из угломерных инструментов чаще других употребляются астролябия и теодолит.

**§ 120.** Астролябия (черт. 47) состоит из лимба $C$, алидады $A$ и двух пар диоптров ($a$, $b$) и ($a_1$, $b_1$).

Лимбом называется круг, разделённый на градусы.

Алидадой называется линейка, которая вращается по лимбу около его центра; при измерении какого-нибудь угла она направляется по его стороне — наводится — на какой-либо предмет на этой стороне.



Черт. 47.

Для наведения алидады — для визирования — служат диоптры: так называются две пластинки, прикреплённые на концах алидады. В них сделаны продольные прорезы — узкие и широкие; против узкого прореза в одном диоптре приходится в другом диоптре широкий прорез с натянутым вдоль него чёрным конским волосом. Визируя на какую-либо точку, ставят алидаду так, чтобы для глаза, смотрящего в узкий прорез одного диоптра, точка была закрыта волоском другого диоптра.

В астролябии — две пары диоптров; два диоптра прикреплены к самому лимбу и называются неподвижными, другие два помещаются на концах алидады и называются подвижными.

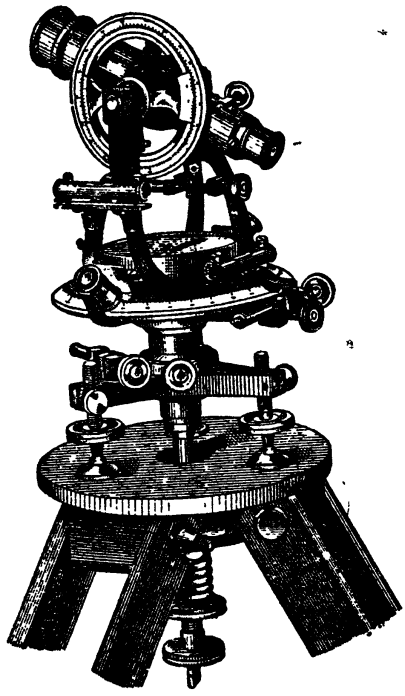
Для ориентирования линий относительно стран света к астролябии присоединяется ещё магнитная стрелка.

Астролябия помещается обыкновенно на раздвижном треножнике, но между треножником и инструментом вводится ещё снаряд, позволяющий склонять плоскость лимба так или иначе. Простейшее из таких приспособлений есть бакса; это — особого рода сферические клещи, охватывающие шар,

которым внизу оканчивается ось лимба; таким образом лимб может вращаться около оси, а самая ось может менять своё направление.

Для установки лимба в горизонтальной плоскости служит уровень, а в вертикальной плоскости — отвес.

**§ 121.** Чтобы измерить горизонтальный угол, сначала устанавливают лимб горизонтально, центром над вершиной угла, что достигается с помощью отвеса с заострённой гирькой; затем, сохраняя горизонтальность лимба, повёртывают его около центра, пока сквозь неподвижные диоптры не увидят предмет на одной из сторон угла; не изменяя теперь положения лимба, ставят подвижные диоптры по направлению другой стороны угла; наконец, делают отсчёт по лимбу между диоптрами.



Черт. 48.

**§ 122.** Чтобы измерить угол между прямой линией $AB$ и горизонтальной плоскостью (угол наклонения линии $AB$), устанавливают лимб в вертикальной плоскости, проходящей через данную линию так, чтобы его центр находился на данной линии; затем, удерживая лимб в той же плоскости, повёртывают его около центра до тех пор, пока диаметр 90°—270° не станет по отвесу; тогда плоскость волосков в неподвижных диоптрах будет горизонтальна; теперь, не изменяя положения лимба, направляют алидаду по линии $AB$ и отсчитывают дугу между диоптрами.

Современный угломерный прибор — теодолит (черт. 48). Его главные части — горизонтальный и вертикальный круги с точными делениями и зрительная труба с большим увеличением.

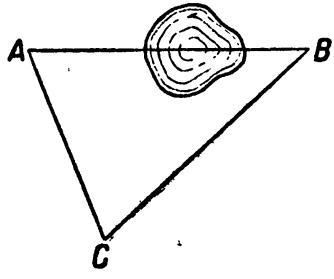
**§ 123. Применение тригонометрии.** Мы рассмотрим здесь только простейшие задачи практической тригонометрии, а именно: 1) определение неприступных расстоя-

ний, 2) определение высот и 3) составление триангуляции. При этом мы ограничимся случаем такой местности, которая может считаться горизонтальной плоскостью или по крайней мере позволяет проводить по некоторым направлениям горизонтальные линии. Для решения указанных задач необходимо сначала измерить некоторые линии и углы. Непосредственное измерение линий на местности представляет двоякую трудность: 1) затруднителен самый процесс измерения и 2) если взятая линия не есть прямая и если она не горизонтальна, то приходится делать разного рода поправочные измерения и вычисления. Углы же измеряются и легче и несравненно точнее. Поэтому стараются измерение линий заменить, насколько возможно, измерением углов; длину линий определяют преимущественно посредством вычислений. Большей частью даже ограничиваются измерением только одной линии; её называют тогда базисом (основанием).

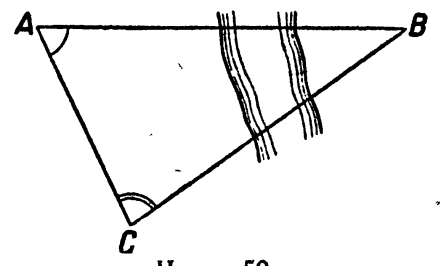
**§ 124. Определение неприступных расстояний.** Здесь могут быть три случая: 1) обе конечные точки доступны, 2) доступна только одна из конечных точек и 3) обе конечные точки недоступны.

Рассмотрим каждый случай.

Точки, между которыми определяется расстояние, обозначим через $A$ и $B$.




Черт. 49.




Черт. 50.

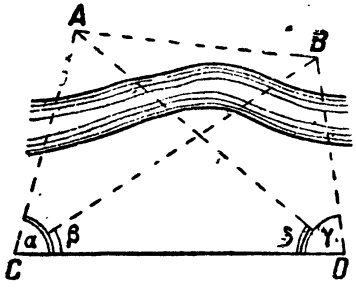
1-й случай. *Точки $A$ и $B$ доступны* (черт. 49).

Решение. а) Если точки $A$ и $B$ не видны одна из другой, то выбирают такую точку $C$, из которой были бы видны те две, и измеряют угол $ACB$ и линии $CA$ и $CB$; по этим данным вычисляют расстояние $AB$.

b) Если же точки $A$ и $B$ видны одна из другой, то измеряют линию $AC$ и углы $A$ и $C$; этих данных достаточно для вычисления $AB$.

2-й случай. *Точка A доступна, а точка B недоступна* (т. е. наблюдатель имеет возможность подойти к точке *A*, а от точки *B* отделён каким-либо препятствием).

Решение. Взяв точку *C* (черт. 50) так, чтобы из неё были видны *A* и *B*, измеряют углы *A* и *C* и базис *AC*. Линию *AB* тогда нетрудно вычислить, так как в треугольнике *ABC* будут известны сторона и два угла.



Черт. 51.

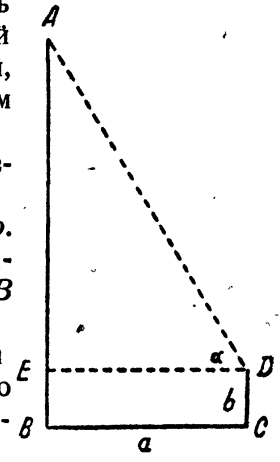
3-й случай. *Точки A и B недоступны* (черт. 51).

Решение. Выбрав в доступной местности точки *C* и *D* так, чтобы из них были видны *A* и *B*, измеряют базис *CD* и углы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$. Из двух треугольников, содержащих *CD*, вычисляют *CA* и *CB*; угол между этими линиями равен $\alpha-\beta$; таким образом можно будет вычислить *AB* из треугольника *ACB*.

Можно также начать вычисление с линий *DA* и *DB*, заключающих угол $\gamma-\delta$, и определить *AB* из треугольника *ADB*. Этот второй способ послужит для первого проверкой, которая особенно полезна в настоящем случае ввиду сложности вычисления.

**§ 125. Определение высоты.** Разберём главные случаи этой задачи.

1-й случай. *Основание доступно.* Положим, например, что измеряемая высота есть *AB* (черт. 52), причём точка *B* доступна.



Черт. 52.

Решение. Из точки *B* проводят на местности какую-нибудь горизонтальную линию *BC* и измеряют её длину; положим, что эта длина есть *a*.

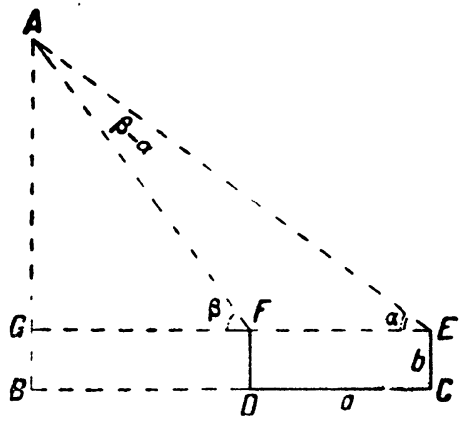
После этого при точке *C* ставят астролябию с вертикальным лимбом так, чтобы центр лимба *D* был над самой точкой *C*, и определяют угол наклонения линии *DA* (§ 122); пусть этот угол равен $\alpha$.

Измеряют ещё по отвесу расстояние *DC*; положим, что получилось $DC = b$.

Зная $a$, $\alpha$ и $b$, будем иметь для вычисления высоты:

$$AB = AE + EB = a \operatorname{tg} \alpha + b.$$

2-й случай. *Основание недоступно.* Пусть на чертеже 53 высота $AB$ представляет пример такого случая. Предположим ещё, что окружающая местность горизонтальна.



Черт. 53.

Решение. Выбирают на местности какую-нибудь достаточно удалённую точку $C$. Помещают над этой точкой астролябию и, поставив лимб вертикально, измеряют угол наклонения линии $EA$ [1]). Затем, не изменяя положения лимба, с помощью неподвижных диоптров намечают на местности какую-нибудь линию $CD$ по направлению плоскости лимба, а следовательно, в одной плоскости с $AB$. Эту линию измеряют как базис. Наконец, переносят в точку $D$ астролябию и, поставив её на такой же высоте, как в точке $C$, определяют угол наклонения линии $FA$.

После сделанных измерений нетрудно вычислить $AB$; пусть, например, получилось: $CD = a$, $FD = EC = b$, $\angle AEG = \alpha$ и $\angle AFG = \beta$. Тогда

$$AB = AG + BG = AF \cdot \sin \beta + b;$$

а из треугольника $AFE$ найдём:

$$AF = \frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)};$$

таким образом:

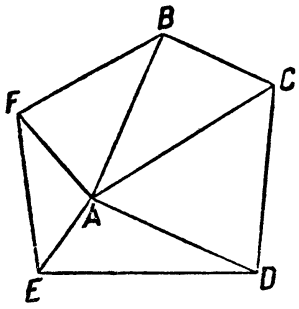
$$AB = \frac{a \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} + b.$$

**§ 126. Триангуляция** [2]). Чтобы снять план какого-нибудь значительного участка земной поверхности, сначала выбирают на нём лишь несколько точек, более удобных,

[1]) Через $E$ обозначен центр лимба.

[2]) Триангуляция — способ составления плана многоугольной фигуры путём разбивки на треугольники. Название триангуляция иногда прилагается к самому способу съёмки.

распределяя их по всему участку (например, точки *A*, *B*, *C*, ... на чертеже 54). Соединив мысленно эти основные точки прямыми линиями, получают сеть треугольников. В этих треугольниках измеряют возможно точнее все углы и одну из сторон, например *AC*. Остальные линии сети определяются уже посредством тригонометрического решения треугольников, причём начинают с того треугольника, в котором находится базис; от него переходят к смежному, от этого — к новому смежному и т. д. (Получение одной и той же линии двумя различными путями служит проверкой вычисления.)



Черт. 54.

Каждая из линий главной триангуляции может в свою очередь служить базисом для новой триангуляции, составленной уже из треугольников более мелких и т. д., чем и определяется на плане положение какой угодно точки участка, т. е. возможность снять весь участок.

## Основные тригонометрические формулы.

I. Соотношения между тригонометрическими функциями.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. 2. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. 3. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

4. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$. 5. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$.

6. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$. 7. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.

8. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

II. Формулы суммы и разности углов.

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$.
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$.
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$.
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

5. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$. 6. $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$.

III. Функции двойного угла.

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. 2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

IV. Функции половинного угла.

1. $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

2. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

3. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

V. Формулы приведения к логарифмическому виду.

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$.

5. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$. 6. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

7. $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 8. $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

VI. Соотношения в прямоугольном треугольнике.

1. $\frac{a}{c}=\sin A;\quad \frac{b}{c}=\cos A;\quad \frac{a}{b}=\operatorname{tg} A.$

2. $a=c\cdot\sin A;\quad b=c\cdot\cos A;\quad a=b\cdot\operatorname{tg} A.$

VII. Соотношения в косоугольном треугольнике.

1. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. Теорема синусов.

2. $a=2R\cdot\sin A.$

3. $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A.$ Теорема косинусов.

4. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$. Теорема тангенсов.

5. $\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$. 6. $\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$. Формулы Мольвейде.

7. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$

$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$

$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$

VIII. Площадь треугольника.

1. $S=\frac{1}{2}ah_a.$ 2. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

3. $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C.$ 4. $S=rp.$ 5. $S=\frac{a^2\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\sin(C+B)}$

## Тригонометрические функции основных углов.

| | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 |
| cos | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 |
| tg | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\infty$ | 0 | $\infty$ | 0 |
| ctg | $\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 | $\infty$ | 0 | $\infty$ |

## Формулы приведения.

| | $\alpha$ | $90°-\alpha$ | $90°+\alpha$ | $180°-\alpha$ | $180°+\alpha$ | $270°-\alpha$ | $270°+\alpha$ | $360°-\alpha$ | $360°+\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| cos | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| tg | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ |
| ctg | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
| sec | $\sec\alpha$ | $\operatorname{cosec}\alpha$ | $-\operatorname{cosec}\alpha$ | $-\sec\alpha$ | $-\sec\alpha$ | $-\operatorname{cosec}\alpha$ | $\operatorname{cosec}\alpha$ | $\sec\alpha$ | $\sec\alpha$ |
| cosec | $\operatorname{cosec}\alpha$ | $\sec\alpha$ | $\sec\alpha$ | $\operatorname{cosec}\alpha$ | $-\operatorname{cosec}\alpha$ | $-\sec\alpha$ | $-\sec\alpha$ | $-\operatorname{cosec}\alpha$ | $\operatorname{cosec}\alpha$ |

Редактор *А. А. Борисов.* Техн. редактор *М. Д. Петрова.*

Подписано к печати 17/I 1951 г. А-01745. Бумага 84 × 108¹/₃₂. Бумажных л. 1,813. Печатных л. 5,94. Учётно-изд. листов 5,79. Тираж 400 тыс. экз. Заказ № 962. Цена без переплёта 85 к. Переплёт 50 к., мягкий переплёт 30 к.

Отпечатано с матриц типографии „Печатный двор" на 2-й фабрике детской книги Детгиза Министерства Просвещения РСФСР. Ленинград, 2-я Советская, 7. Зак. № 630.